حساب التفاضل والتكامل

تأليف

شفيق بك منصور

(يكن)

الجزء الاول

فى

حساب التفاضل

يوجد عند احمد افندى العشى والخواجه يوسف شيت

بالقاهرة

كتب اخرى للمؤلف

APPLICATION DES MATHEMATIQUES A LA JURISPRUDENCE

(تطبيق الرياضيات على علم القوانين)

حساب التكامل
مختصر علم الحساب
مختصر علم الجبر
مختصر علم الهندسة

} تحت الطبع ببولاق

حساب التفاضل والتكامل

تأليف

شفيق بك منصور
(يكن)

الجزء الاول

في حساب التفاضل

يوجد عند احمد افندي العشي والخواجه يوسف ثيت

بالقاهرة

الفهرست

صحيفة

الباب الخامس

الباب السادس

صحيفة

الباب السابع

الباب الثامن

الباب التاسع

الباب العاشر

الباب الحادى عشر

صحيفة

تمرينات

صحيفة

الباب السادس عشر

الباب السابع عشر

الباب الثامن عشر

الباب التاسع عشر

تمت الفهرست

اصلاح الغلط

صحيفة	سطر	خطا	صواب
٤	٧	مقامير	مقادير
٤	١٣	اللانهائية	اللانهائية العدد
١٠	٦	مص	م(س)
١١	١٨	التاضل	التفاضل
١٤	١٠	مَ(ط ر ل)	م(ط ر ل)
١٤	١٨	قصير	تصير
١٦	٥	فيوتن	نيوتن
١٧	٣	عد	عدد
١٧	١٢ و ١٣	ة	هـ
١٩	٣	$\text{هـ ر} + \frac{\text{اب}}{٢}$	$\text{هـ ر} \times \frac{\text{اب}}{٢}$
٢١	٤	هذا	هذه
٢٤	١٦	$ط^{١}$	$ط^{٢}$
٢٥	١٢	$\text{قوحا س}\ \frac{\infty}{(١ - س^{٢})}\ \frac{١}{٢}\ \text{ىس}$	$\text{قوحا س}\ \frac{\infty}{(١ - س^{٢})^{\frac{١}{٢}}}\ \text{ىس}$
٢٥	١٤	$\frac{س}{(١ - س^{٢})}\ \frac{١}{٢}$	$\frac{س}{(١ - س^{٢})^{\frac{١}{٢}}}$
٢٦	٣	$\frac{\delta}{٢}$	$\frac{\delta}{٤}$
٢٧	١٠	ىص	ىس
٢٧	١١	ىص	ىس
٠٠	٤	$م^{ن}(س)\ \text{ى}^{ن}\text{س}$	$م^{ن}(س)$

صحيفة	سطر	خطأ	صواب
٣٤	٦	+	×
٣٥	٨	+	×
..	٣٠	+	×
٣٦	٢٠	+(ن − ١)	×(ن − ١)
٣٧	٤	٣ + ٢ × ١	٣ × ٢ × ١
..	..	$(\text{١} -)^{\text{سن}} \times \text{١}$	$(\text{١} - \text{س})^{\text{ن}+\text{١}}$
٤٠	١٤	$\frac{\text{د}^{\text{٢}}\text{س}}{\text{د ط}^{\text{٣}}}$	$\frac{\text{د}^{\text{١}}\text{س}}{\text{د ط}^{\text{٣}}}$
	١٧	$\frac{\text{د}^{\text{٣}}\text{ص}}{\text{د س}}$	$\frac{\text{د}^{\text{٢}}\text{ص}}{\text{د س}^{\text{٢}}}$
٤٢	١١	$\frac{\text{د}^{\text{٢}}\text{س}}{\text{د ص}^{\text{٢}}}$	$\frac{\text{د}^{\text{٣}}\text{س}}{\text{د ص}}$
٤٦	٤	تنعد	تنعدم
٥٠	٥	$\text{نها} \frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{م}'(\text{س})}$	$\text{نها} \frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{م}'(\text{س})}$
..	٨	$\text{نها حاس}^{\text{٢}}$ س	$\text{نها} \frac{\text{حا}^{\text{٢}}\text{س}}{\text{س}}$
٥١	١٨	$\frac{\text{١}}{\text{س}^{\text{٤}}}$	$-\frac{\text{١}}{\text{س}^{\text{٢}}}$
..	١٥	س =	س = ٠
٥٦	٧	بمتولية	بمتوالية
..	٩	الاول	الاولى
..	..	غائبة	غائية
٦١	٣	$\text{س}^{\text{ح}-\text{٢}}\ \text{ء}$	$\text{س}^{\text{ح}-\text{٢}}\ \text{ء}^{\text{٢}}$
..	٩	$\text{م}'''(\text{س})$	$\times\ \text{م}'''(\text{س})$
٦٢	١٨	$\frac{\text{١}}{\text{٢} + \text{٣}}$	$\frac{\text{١}}{\text{٢} \times \text{٣}}$

صحيفة	سطر	خطأ	صواب
٦٣	٦	الذى	التى
٦٤	١٠	$\frac{ع^{2}}{2!}\, م(س)$	$\frac{ع^{2}}{2!} \cdot م''(س)$
٠٠	١٦	بالمتغيرة	بالمتغيرة سَ
٠٠	٠٠	$مَ(س)$	$م(س)$
٠٠			ضع جدولا أى خطا عرضيا قبل السطر الاخير
٦٧	١٤	فنهى	فنتهى
٦٩	١٣	$مَ(س)(٠)$	$مَ(٠)$
٧٠	١٣	أيحكم	يحكم
٠٠	١٤	ن	ان
٧٥	١٣	لذى	الذى
٧٦	١	$١ \times س$	$١ + س$
٧٧	١٣		ضع فى أول السطر علامة الضرب ×
٨٤	٤	جا ص +	جتا ص +
٠٠	١٩	$(\quad)$	$(\quad)^{ع}$
٨٤	٩	حصل	حاصل
٨٦	٣	وهو	وهو أى الحد المتوسط
٨٦	٨	$\frac{ع}{2} - ١$	$\frac{ع}{2} + ١$
٨٦	١٦	$\frac{ع}{2} - ١$	$\frac{ع}{2} + ١$
٨٦	٨	٠٠٠٠ع	٠٠٠٠
٨٧	٥	لوحظا	لوحظ

صحيفة	سطر	خطا	صواب
٨٨	٢١	ن = ح ء + ن	نَ = ح ء + نَ
٨٨	٢١	نون	نَ
٩٠	٦	الاسـيـه	الاسية
٩١	٣	$\overline{٢}$	$\overline{\sqrt{٣} - ١}$
٩١	١٥	ص	صس
٩٣	٦	فيسمى	يسمى
٩٤	١	معددته	معدومة
٩٤	١٥	لفرق	الفرق
١٠٥	٨	(س — س)	(س — سً)
١٠٧	١٤	لمحنى	المحنى
١٠٨	١	لزاوية	الزاوية
١٠٩	١٢	المعادلة	المعادلة الاولى
١١٠	٦	بد	بو
١٠٠	٢	$\frac{\text{سس}}{\text{م}^٢}$	$\frac{\text{سس}}{\text{أ}^٢}$
١١٠	٤	$\frac{\text{أ}^٢ - \text{س}^٢}{\text{س}}$	$\frac{\text{أ}^٢ - \text{سَ}^٢}{\text{سَ}}$
١١٢	٩	$\frac{\text{ء}^٤}{\text{أ}^٤} \quad \frac{٦\text{ص}^٣}{٦\text{س}^٣}$	$\frac{\text{ه}^٤}{\text{أ}^٤} \quad \frac{٦\text{ص}^٤}{٦\text{س}^٤}$
١١٢	١٤	أما	إما
١١٣	٢	لمحف	لمحن
١١٣	٩	دو	فو

صحيفة	سطر	خطأ	صواب
١١٤	١١	$\frac{\partial ص}{\partial س}٢$	$\left(\frac{\partial ص}{\partial س}\right)^{٢}$
١١٤	١٣	ن	نهى
١١٤	٤١	$=\frac{\partial ن}{\partial س}$	$\frac{\partial ن}{\partial س}=$
١١٦	٢	م (س)	$\bar{م}$(م)
١١٦	٢	م (س)	$م''$(س)
١١٦	٣	٢!	٣!
١١٦	١٢	٣	$ء^{٣}$
١١٨	٤	بكوّن	يكون
١١٨	١٠	جهة	جهتى
١١٩	٦	بنحى معلوم	بنحن معلوم ص = م(س)
١١٩	٢٢	$\frac{\partial ص^{٢}}{\partial س}$	$\frac{\partial ص^{٢}}{\partial س^{٢}}$
١٢٠	٣	$\frac{\partial^{٢} ص}{\partial س}$	$\frac{\partial ص}{\partial س}$
١٢٠	٣	$\frac{\partial^{٢} ص}{\partial س}$	$\frac{\partial^{٢} ص}{\partial س^{٢}}$
١٢١	١١	الرادية	الزاوية
١٢١	١٣	ذق	$ذق_{١}$
١٢٩	١	ب	$ب^{٢}$
١٢٩	١	ـب	$ـب^{٢}$
١٢٩	٢	$م^{٤} س^{٢}$	$ا^{٤} ص^{٢}$
١٢٩	٥	السابقله	السابقة
١٢٩	١١	$ع^{٣}$	$ع^{٢}$
١٣٣	٦	صَ	$صَ^{٢}$

صحيفة	سطر	خطا	صواب
١٣٤	١١	ف	و (حرف عطف)
١٣٧	١٥	نق + ف نق	$\text{نق}_{1} + \text{ف نق}_{1}$
١٣٨	٥	٩٥	٩٠
١٣٨	٦	ا الوتر	الوتر
١٣٨	١٠	١١٦	١٠٠
١٣٩	١٢	٩٥	٩٠
١٦٠	١٤	صـ + صـ	صـ + ة صـ
١٦٣	٦	س^{2}	$\times \text{س}^{2}$
١٦٦	٨	$\frac{\partial \text{م}}{\partial \text{س}}$	$\frac{\partial \text{م}}{\partial \text{ص}}$
١٦٦	١٥	$\frac{\partial \text{م}}{\partial \text{م}}$	$\frac{\partial \text{م}}{\partial \text{س}}$
١٦٦	١٧	$\frac{\partial \text{م}}{\partial \text{م}}$	$\frac{\partial \text{م}}{\partial \text{ع}}$
١٧٤	٥	شـ ٣٥	شـ ٣٠
١٩٠	٢٠	+ ٠	= ٠
١٩٦	١٢	مـ	مَـ

تم

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله سريع الحساب المتعالى عن التفاضل اذ كل ما سواه مفضول غير كامل وانيس الاله التكامل والصلاة والسلام على سيدنا محمد غير محصاني العدد وعلى آله وأصحابه الذين كانوا يعدون المآثر المستمرة على الزيادة أحسن العدد (وبعد) فان العلوم الرياضية علوم نفيسة ولا شبهة في أن ينسب اليها معظم التقدم الذى حصل الآن فى البلاد الاوروباوية وخصوصا منذ اختراع علم التحليل العالى أى حساب التفاضل والتكامل اذ به حسنت الميخانيقة وتحسنت الآلات التى عليها مدار الصنائع وتقدمت العلوم الفلكية والبحرية والحربية والهندسية العملية فاذا هذا العلم جليل القدر عظيم الفوائد ولذا ألفت فيه هذا الكتاب مما تلقيته عن أساتذتى ومن الكتب المعتبرة الاوروباوية أيضا على أسلوب مختصر مفيد لاسيما وقد اوردت فيه من الامثلة والتمارين ما هو تسهيل وتقريب للمبتدئين قاصدا به النفع للوطن اذ كان خدمة لابنائه وأساله عز وجل أن يلهمنى الصواب

هذا وأول من وضع هذا العلم رجلان كانا متعاصرين فى القرن السابع عشر من الميلاد أحدهما الايبنتس الالمانى (ولد سنة ١٦٤٦ ومات سنة ١٧١٦) والآخر نيوتون الانجليزى (ولد سنة ١٦٤٢ ومات فى سنة ١٧٢٧) وذلك انه لما اخترع ديكارت الفرنساوى (ولد فى سنة ١٥٩٦ ومات سنة ١٦٥٠) الهندسة الجبرية المعروفة بتطبيق الجبر على الهندسة عظم ميدان المسائل وتحير العلماء فى حل أكثرها كمسائل المماس والنهايات الكبرى والصغرى وتسطيح الاشكال وغير ذلك فاشتغل بها هذان العالمان حتى صادفا أصول هذا العلم ثم اجتهد فيه بعدهما الرياضيون الى أن أوصلوه الآن الى ما أوصلوه من الدرجة العظمى من التقدم وهذا أوان الشروع فى المقصود وبالله عز وجل الاستعانة

حساب التفاضل والتكامل

(فى حساب التفاضل)

(الباب الاول)

(تعريفات أوليه)

المطلب (١) الكميات هنا نوعان ثابتة ومتغيرة فالثابتة ما تحفظ طول العملية مقدارا واحدا معينا والمتغيرة ما تاخذ طولها عدة مقادير مختلفة ولتمييز كل من هذين النوعين عن الآخر نشير غالبا الثابتة بالحروف المعجمة

ب ج ز ى ے ق ف ن ش ت ة ث خ ذ ض ظ غ

وللمتغيرة بالحروف المهملة

ا د هـ و ح ط ك ل م س ع ص ر

(٢) تنقسم الكميات المتغيرة الى متعلقة ومستقلة فالمتغيرة ص يقال انها متعلقة بالمتغيرة س والمتغيرة س مستقلة اذا اخذت الاولى مقدارا أو جملة مقادير معينة حينما يعطى الى الثانية مقدار أو عدة مقادير اختيارية مثلا سطح الدائرة متعلق بنصف قطرها لانه يتغير بتغيره وكذا سعة الكرة متعلقة بنصف قطرها وذبذبة البندول بطوله

(٣) هذا التعلق يبين غالبا بمعادلة فتسمى الكمية المتعلقة ظاهرة اذا كانت هذه المعادلة محلولة بالنسبة اليها ومضمرة فى غير ذلك مثلا فى المعادلة

$$ص = س + \sqrt{١ - س^{٢}}$$

المتعلقة ص ظاهرة وفى المعادلة

$$ص^{٢} - ٢ س ص - ١ = ٠$$

هى مضمرة وللدلالة على هذا التعلق بوجه عام يكتب فى المتعلقة الظاهرة

$$ص = م (س) \text{ أو } ص = م (س) \text{ أو } ص = م_{١} (س) \text{ ... الخ}$$

وفى المضمرة

$$م (س، ص) = ٠ \text{ أو } م (س، ص) = ٠ \text{ أو } م_{١} (س، ص) = ٠ \text{ الخ}$$

(ملحوظ) كثيرا ما تكون المتغيرة الواحدة متعلقة بجملة مستقلات كسطح الاسطوانة فانه متعلق بارتفاعها وبنصف قطر قاعدتها فالمعادلة

ط = م (س و ص) أو م (س و ص و ط) = ٠

معناها أن ط متعلقة بالمتغيرتين س و ص وبالجملة اذا كانت ع مثلا متعلقة بثلاث متغيرات أو بأكثر يرمز لها بالرمز

ع = م (س و ص و ط ٠٠٠) أو م (س و ص و ط ٠٠٠ ع) = ٠

(٤) يقال أن المتعلقة ص مستمرة اذا أخذت عدة مقادير حقيقية معينة وكانت الفروق بينها كميات صغيرة جدا عندما تأخذ المستقلة س عدة مقادير تكون الفروق بينها كذلك كميات صغيرة جدا

(٥) حينما يقرب مقدار المتغيرة س من كمية معينة ثابتة ح بحيث يصير الفرق بينهما صغيرا جدا بقدر ما يراد تسمى الكمية الثابتة ح نهاية المتغيرة س ويكتب بطريق الاختصار نها س = ح مثال ذلك سطح الدائرة فانه نهاية لسطح الشكل المنتظم ذى الاضلاع اللانهائية المرسوم داخلها لان الفرق بينهما صغير جدا كما هو معلوم فى الهندسة العادية

(٦) الكمية الصغرى جدا هى التى نهايتها صفر وينتج من هذا ومما سبق ان كل كمية صغرى تكون متغيرة غير معينة وتقرب دائما من الصفر كالفرق بين مساحتى كثير الاضلاع والدائرة المذكور فى المطلب السابق

(٧) الكمية العظمى أو اللانهائية هى التى تزداد دائما وتصير أكبر من كل كمية مفروضة ويرمز لها بالعلامة ∞ أو ـ مثلا ظا س يكبر دائما كلما قربت س من الزاوية القائمة فاذا ساوتها صار لانهائيا وكذا $\frac{ح^2}{ح - س}$ يصير لانهائيا عندما تكون س مساوية الكمية ح ولوضع هذا على وجه جبرى يكتب

نها ظا س = ∞ بفرض س = $\frac{ط}{٢}$ (١)

و نها $\frac{ح^2}{ح - س}$ = ∞ بفرض س = ح

(١) ويرمز بهذا الحرف ط (طا سريانيه) الى نسبة محيط الدائرة لقطرها

(ملحوظ) فى حالة ماتكون سـ فى الكمية حـ٢/حـ سـ أصغر من ٢ تكون نهايتها موجبة وفى حالة ماتكون أكبر تكون النهاية سالبة فالانهاية تكون حينئذ موجبة أو سالبة

فى المتعلقة المشتقة ومعناها الهندسى

(٨) لنفرض ص = م (سـ) متعلقة مستمرة فاذا زادت المستقلة زيادة ما ف سـ زادت المتعلقة مقابلة لذلك بالمقدار ف ص وتؤل المعادلة المذكورة الى

ص + ف ص = م (سـ + ف سـ) أو ف ص = م (سـ + ف سـ) — م (سـ) (١)

وبقسمة كل من الطرفين على ف سـ يحدث

ف ص / ف سـ = [م (سـ + ف سـ) — م (سـ)] / ف سـ

فاذا فرضنا أن ف سـ يتناقص الى غير نهاية تقرب النسبة ف ص / ف سـ من نهاية معينة غالبا سماها الرياضى لاجرانج (٢) مشتقة المتعلقة ص ورمز لها هذا المؤلف الشهير بالرمز صَ أو مَ (سـ) فحينئذ يكون

نها ف ص / ف سـ = نها [م (سـ + ف سـ) — م (سـ)] / ف سـ = صَ أو مَ (سـ)

مثلا لمعرفة مشتقة المتعلقة ص = سـ^٢ المفروض فيها أن ٢ كمية موجبة صحيحة نقول اذا زادت المستقلة سـ بالمقدار ف سـ زادت المتعلقة ص بالمقدار ف ص كما تقدم ويحدث

ص + ف ص = (سـ + ف سـ)^٢ أو ف ص = (سـ + ف سـ)^٢ — سـ^٢

وببسط الكمية ذات الحدين (سـ + ف سـ)^٢ على حسب قانون نيوتون نجد

---

(١) الزيادة ف ص تسمى أيضا فاضل المتعلقة ص

(٢) ولد سنة ١٧٣٦ ومات سنة ١٨١٣ وهو أحد الفحول الفرنساويين فى العلوم الرياضية

$$(١)\quad ف\,ص = س^{ح} + \frac{ح}{!١} س^{ح-١} ف\,س + \frac{ح(ح-١)}{!٢} س^{ح-٢} ف\,س^{٢}$$

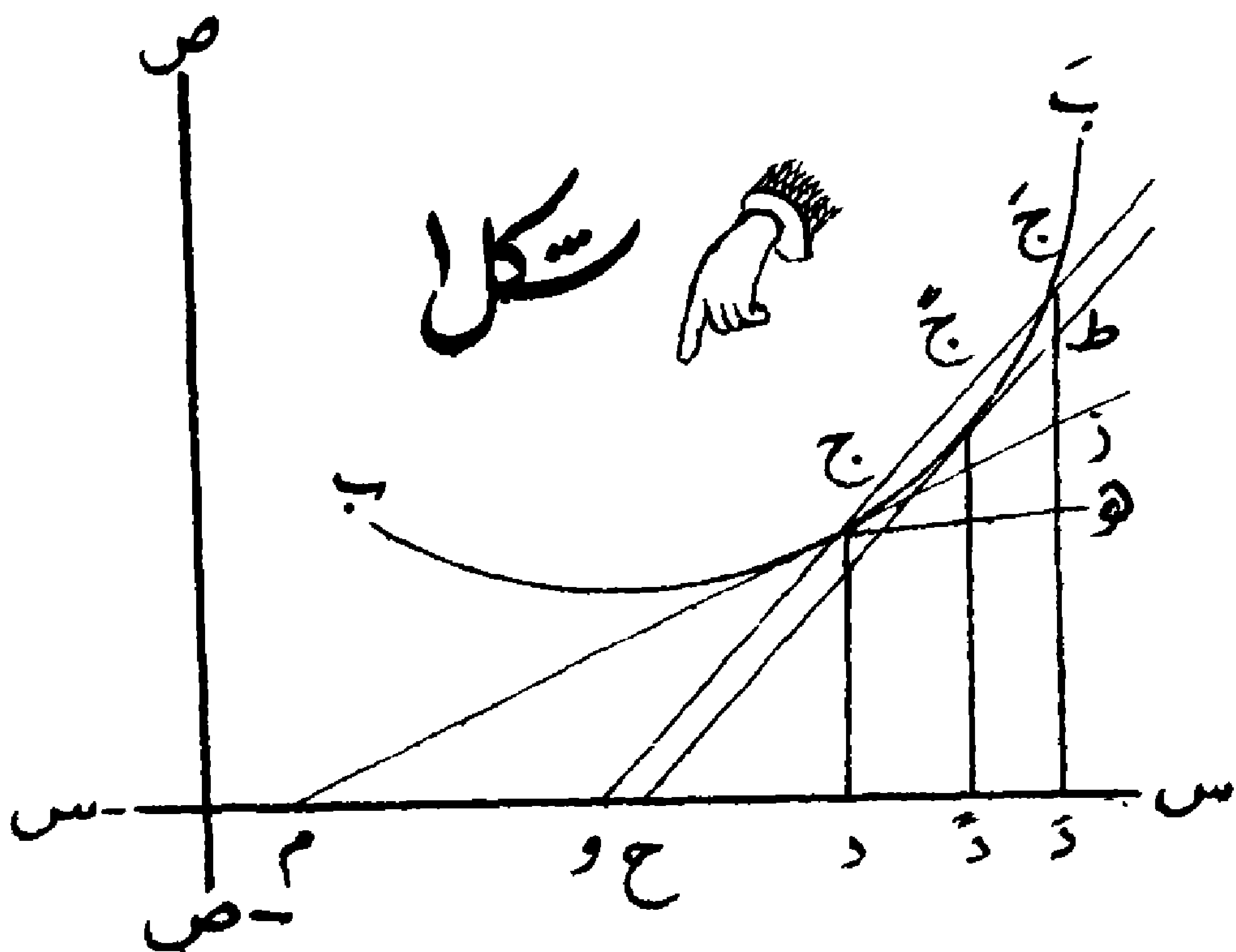
$$+ \frac{ح(ح-١)(ح-٢)}{!٣} س^{ح-٣} ف\,س^{٣} + \cdots + ف\,س^{ح} - س^{ح}$$

وبقسمة كل من الطرفين على ف س بعد محو $س^{ح}$ يحدث

$$\frac{ف\,ص}{ف\,س} = ح\,س^{ح-١} + \frac{ح(ح-١)}{!٢} س^{ح-٢} ف\,س +$$

$$\frac{ح(ح-١)(ح-٢)}{!٣} س^{ح-٣} ف\,س^{٢} + \cdots + ف\,س^{ح-١}$$

وبالمشاهدة نجد أنه كلما نقص ف س يقرب الطرف الثاني من الكمية $ح\,س^{ح-١}$ وعند النهاية يكون $نها \frac{ف\,ص}{ف\,س} = ح\,س^{ح-١}$ وهي المشتقة المطلوبة



ولنبحث الآن عن المعنى الهندسي للمشتقات فنقول ليكن ب بَ منحنيا (شكل ١) مبينا بالمعادلة ص = م(س) ومرسوما بالنسبة إلى محورين

---

(١) اعلم بأن في كل ما يأتي العلامة ح! (بفرض ح عددا صحيحا) تدل على حاصل الضرب ١ × ٢ × ٣ × ٤ × ... × ح

متعامدين ا س و ا ص فاذا فرضنا أن س = ا د و ص = ج د احداثي (١) النقطة ج الكائنة على المنحني المذكور وزاد المعين ا د بالمقدار ف س المساوي د دَ فالمرتب ج د يصير جَ دَ أو ج د + جَ هـ أعني ص + جَ هـ وحينئذ يكون جَ هـ هو مقدار ف ص الذي زاده المرتب ص مقابلة لزيادة س التي هي ف س أو د دَ ويرسم قاطع المنحني ج جَ و ومماسه في النقطة ج وهو م ج ز ورسم ج هـ موازيا لمحور السينات نجد في المثلث ج جَ هـ القائم الزاوية

$$\frac{\text{جَ هـ}}{\text{ج هـ}} \text{ أو } \frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}} = \text{ظا جَ ج هـ أو ظا ج و س}$$

ومن هنا ينتج أن النسبة $\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}}$ تعادل غالبا الظل المساحي للزاوية الحادثة من تلاقي القاطع ج جَ و مع محور المعينات فاذا فرضنا أن الزيادة ف س أو ما ساواها وهو د دَ يتناقص بالتدريج فيدور القاطع و ج جَ حول النقطة ج ويقرب من المماس ج م وبعبارة أخرى كلما تناقص ف س وقرب من الصفر قربت الزاوية ج و س من الزاوية ج م س فاذا تكون $\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}}$ نها أعني المشتقة تساوي الظل المساحي للزاوية التي هي ميل المماس على محور المعينات ومن البديهي أن الزاوية ج م س تتغير بانتقال النقطة ج على المنحني أعني بتغير المعين س فظل هذه الزاوية أعني المشتقة تكون متعلقة بالمتغيرة س

في التفاضل

(٩) حيث أن النسبة $\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}}$ تقرب من النهاية صَ يمكن أن يوضع

$$\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}} = \text{صَ} + \text{ى أو ف ص} = \text{صَ ف س} + \text{ى ف س}$$

---

(١) قد سمينا الاحداث ا د (شـ ١) بالاحداث المعين والاحداث ج د بالاحداث المرتب (وهما اسما فاعل)

(كمية تعدم مع ف س) فاذا صار ف س صغيرا جدا سمى الحد الاول وهو صَ ف س تفاضل المتعلقة ص ويرمز له بالرمز ٮ ص (وتقرأ فا صاد) فيكون

ٮ ص = صَ ف س أو ٮ ص = مَ (س) ف س (١)

وينتج من هذا التعريف أن تفاضل المتغيرة المستقلة س يساوى الزيادة ف س لانه اذا فرضنا أن ط = س يكون ف ط = ف س أو $\frac{ف ط}{ف س}$ = ١ ومنها نها $\frac{ف ط}{ف س}$ = ١ أعنى ان مشتقة المتعلقة ط تساوى واحدا فاذا يكون

ٮ ط أو ٮ س = ١ × ف س = ف س وهو المطلوب بيانه

فتصير المعادلة (١)

ٮ ص = مَ (س) ٮ س ومنها $\frac{ٮ ص}{ٮ س}$ = مَ (س) = نها $\frac{ف ص}{ف س}$

ومعنى المعادلة الاولى هو أن تفاضل أى متعلقة يساوى حاصل ضرب مشتقتها فى تفاضل المتغيرة المستقلة ولذا سميت المشتقة المكرر التفاضلى

ومن الضرورى معرفة الفرق بين ف ص و ٮ ص أى بين زيادة المتعلقة ص وتفاضلها ولاجل ذلك يقال حيث ان ٮ س = ف س المساوى ددَ (ش ١) و ف ص = جَ هـ وكان فى المثلث ىَ ج هـ القائم الزاوية

ىَ هـ = ج هـ طا ىَ ج هـ = صَ ٮ س يكون ىَ هـ = ٮ ص

ومن هنا ينتج انه يوجد فرق بين زيادة المتعلقة وتفاضلها وان النسبة بينهما وهى $\frac{ف ص}{ٮ ص}$ = ١ + $\frac{س}{صَ}$ تقرب من الواحد ان تناقص ف س الى غير نهاية وكانت المشتقة صَ غير صفر

(١٠) اذا كانت المشتقة مَ (س) مستمرة بين النهايتين س و س + ف س (أعنى لكل مقادير س المحصورة بينهما) تاخذ النسبة $\frac{ف ص}{ف س}$ صورة لطيفة لانه يوجد (ش ١) مستقيم وهو ح جً ط موازا للقاطع ج جَ

ومماس المنحنى فى نقطة جً موضوعة بين النقطتين ج و جَ ولها الاعين
اد ً المحصور بين اد و ادَ أعنى بين س و س + ف س فاذا
فرضنا أن ادً = س + ۃ ف س يأخذ (ۃ) عددا موجبا
محصورا بين الصفر والواحد يكون

طا جً ء دً = م (س + ۃ ف س)

ومن المعلوم ان طا ج و س = ف ص / ف س وان جً ء دً = ج و س
فيكون حينئذ

ف ص / ف س = مَ (س + ۃ ف س) ومنها ف ص = مَ (س + ۃ ف س) ف س (١)

(فى بعض خواص عامة للمشتقات)

(١١) القانون (١) السابق يفيدنا بعض خواص مهمة للمشتقات

(الاولى) اذا فرضت الزيادة ف س موجبة اتحدت علامتا ف ص و
م (س + ۃ ف س) وحيث انه يمكن فرض ف س صغيرا صغرا بحيث لا تتغير
علامة مَ (س) حينما تزداد س من س الى س + ف س تكون
مَ (س + ۃ ف س) أو ف ص متحدة العلامة مع مَ (س) وينتج
من هذا انه اذا اخذت للمستقلة مقادير تصاعدية تصاعدت أو تنازلت مقادير
المتعلقة على حسب كون المشتقة موجبة أو سالبة

(الثانية) اذا كانت مشتقة المتعلقة م (س) معدومة مهما فرضت
س خلت هذه المتعلقة من المتغيرة س وصارت كمية ثابتة برهانه ان
يقال حيث ان مَ (س) = ٠ يكون أيضا على موجب ما فرضنا
مَ (س + ۃ ف س) = ٠ وحينئذ المعادلة (١) تصير ف ص = ٠
ومن المعلوم ان ف ص = م (س + ف س) — م (س) فينتج

م (س + ف س) = م (س)

يعنى ان المتعلقة م (س) لا تتغير بتغير س وعليه تكون كمية ثابتة
وهو المطلوب

(الثالثة) اذا تساوت مشتقتا المتعلقتين $\text{م}(\text{س})$ و $\text{مٍ}(\text{س})$ يكون فرقهما كمية ثابتة لانه لو وضع

$$\text{ص}=\text{م}(\text{س})-\text{مٍ}(\text{س})$$

لكان

$$\text{ص}+\text{ف ص}=\text{م}(\text{س}+\text{ف س})-\text{مٍ}(\text{س}+\text{ف س})$$

ويحدث من ذلك

$$\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}}=\frac{\text{م}(\text{س}+\text{ف س})-\text{م}(\text{س})}{\text{ف س}}-\frac{\text{مٍ}(\text{س}+\text{ف س})-\text{مٍ}(\text{س})}{\text{ف س}}$$

وعند النهاية

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}=\text{مَ}(\text{س})-\text{مٍَ}(\text{س})$$

وحيث كان فرضنا $\text{مَ}(\text{س})=\text{مٍَ}(\text{س})$ يكون $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}=٠$ اعنى تكون ص كمية ثابتة وهو ما اردنا أن نبينه

(١٢) الغرض من حساب التفاضل هو البحث عن مشتقات المتعلقات وتفاضلاتها وعن تطبيق خواصهما على المسائل الجبرية والهندسية

﴿الباب الثانى﴾

(فى مشتقة حاصل الجمع وتفاضله)

(١٣) لتكن ط و ى و ع ثلاث متعلقات بالمستقلة س فاذا اريد ايجاد مشتقة الحاصل ص من

$$\text{ص}=\text{ط}-\text{ى}+\text{ع}$$

نقول اذا زادت س بالمقدار ف س زادت الكميات الاربع المذكورة بالمقادير ف ص و ف ط و ف ى و ف ع وينتج

$$\text{ص}+\text{ف ص}=(\text{ط}+\text{ف ط})-(\text{ى}+\text{ف ى})+(\text{ع}+\text{ف ع})$$

وبطرح المعادلة الاولى من الثانية طرفا من طرف يحدث

$$\text{ف ص}=\text{ف ط}-\text{ف ى}+\text{ف ع}$$

وبقسمة كل من طرفى هذه المعادلة على ف س يوجد

$$\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}}=\frac{\text{ف ط}}{\text{ف س}}-\frac{\text{ف ى}}{\text{ف س}}+\frac{\text{ف ع}}{\text{ف س}}$$

ويأخذ

و بأخذ النهايات يحصل

$$\text{نها}\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}} = \text{نها}\frac{\text{ف ط}}{\text{ف س}} - \text{نها}\frac{\text{ف ى}}{\text{ف س}} + \text{نها}\frac{\text{ف ح}}{\text{ف س}}$$

او

$$\frac{\text{ϭص}}{\text{ϭس}} = \frac{\text{ϭط}}{\text{ϭس}} - \frac{\text{ϭى}}{\text{ϭس}} + \frac{\text{ϭح}}{\text{ϭس}}$$

وهى المشتقة المطلوبة

واذا أريد التفاضل يكفى ان نضرب طرفى هذه المعادلة فى ϭس فيحدث

$$\text{ϭص} = \text{ϭط} - \text{ϭى} + \text{ϭح}$$

اعنى ان مشتقة حاصل جمع متعلقتين أو جملة متعلقات تساوى حاصل جمع مشتقات هذه المتعلقات وكذا تفاضله

﴿ فى مشتقة حاصل الضرب وتفاضله ﴾

(حاصل ضرب متعلقة فى كمية ثابتة)

(١٤) لتكن المعادلة ص = حـ ط التى فيها حـ كمية ثابتة و ط متعلقة بالمستقلة س فاذا زادت س بالمقدار ف س حدث كما تقدم نظيره

$$\text{ص} + \text{ف ص} = \text{حـ}\,(\text{ط} + \text{ف ط}) = \text{حـ ط} + \text{حـ ف ط}$$

وبحذف الحدين المتساويين وهما ص و حـ ط يحدث

$$\text{ف ص} = \text{حـ ف ط} \qquad \text{ومنه} \qquad \frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}} = \text{حـ}\frac{\text{ف ط}}{\text{ف س}}$$

و بأخذ النهايتين ينتج $\frac{\text{ϭص}}{\text{ϭس}} = \text{حـ}\frac{\text{ϭط}}{\text{ϭس}}$ وهى المشتقة المطلوبة

و بضرب كل من الطرفين فى ϭس نجد ϭص = حـ ϭط وهو التفاضل

و ينتج من ذلك أن مشتقة حاصل ضرب متعلقة او تفاضلها فى مكرر ثابت يساوى حاصل ضرب مشتقة المتعلقة أو تفاضلها فى المكرر الثابت

(حاصل ضرب متعلقتين)

ولمعرفة المشتقة لحاصل ضرب متعلقتين بالمستقلة س نفرض أن ص = ى ط فبزيادة س بالمقدار ف س يحدث

$$\text{ف ص} = (\text{ى} + \text{ف ى})(\text{ط} + \text{ف ط}) - \text{ى ط}$$

أو

$$\text{ف ص} = \text{ى ف ط} + \text{ط ف ى} + \text{ف ى} \times \text{ف ط}$$

و بقسمة كل من الطرفين على ف س نجد

$$\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}} = \text{ى}\,\frac{\text{ف ط}}{\text{ف س}} + \text{ط}\,\frac{\text{ف ى}}{\text{ف س}} + \text{ف ى} \times \frac{\text{ف ط}}{\text{ف س}}$$

وبفرض أن ف س كمية صغيرة جدا ينعدم الحد الاخير لانه يصير حاصل ضرب مشتقة ط فى كمية صغيرة جدا وهى ف ى وحينئذ يكون

$$\frac{\text{٦ص}}{\text{٦س}} = \text{ى}\,\frac{\text{٦ط}}{\text{٦س}} + \text{ط}\,\frac{\text{٦ى}}{\text{٦س}}$$

ومنها $\text{٦ص} = \text{ى}\ \text{٦ط} + \text{ط}\ \text{٦ى}$

اعنى ان مشتقة حاصل ضرب متعلقتين أو تفاضله يساوى حاصل ضرب المتعلقة الاولى فى مشتقة الثانية أو تفاضلها زائدا حاصل ضرب الثانية فى مشتقة الاولى أو تفاضلها

(حاصل ضرب جملة متعلقات)

وبمثل ما سبق يمكن ايجاد المشتقة لحاصل ضرب جملة متعلقات عددها ن او تفاضله فانه اذا فرضنا أن

$$\text{ص} = \text{ى ط ل} \cdots\cdots \text{الخ}$$

يحدث $\text{ف ص} = (\text{ى} + \text{ف ى})(\text{ط} + \text{ف ط})(\text{ل} + \text{ف ل}) \cdots\cdots \text{الخ}$

$$- \text{ى ط ل} \cdots\cdots \text{الخ}$$

واذا اجرينا عملية الضرب ورمزنا بالحرف غ لحاصل جمع الحدود المشتملة على زيادتين فاكثر من الزيادات ف ى و ف ط .... ثم قسمنا كلا من الطرفين على ف س نجد

$$\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}} = \text{ط ل} \cdots \frac{\text{ف ى}}{\text{ف س}} + \text{ى ل} \cdots \frac{\text{ف ط}}{\text{ف س}} + \text{ى ط} \cdots \frac{\text{ف ل}}{\text{ف س}} + \cdots + \frac{\text{غ}}{\text{ف س}}$$

وحيث ان نها $\frac{\text{غ}}{\text{ف س}} = ٠$ كما تقدم يكون

$$\frac{\text{٦ص}}{\text{٦س}} = \text{ط ل} \cdots \frac{\text{٦ى}}{\text{٦س}} + \text{ى ل} \cdots \frac{\text{٦ط}}{\text{٦س}} + \text{ى ط} \cdots \frac{\text{٦ل}}{\text{٦س}} \cdots + \cdots$$

ومنه

$$\text{٦ص} = \text{ط ل} \cdots \text{٦ى} + \text{ى ل} \cdots \text{٦ط} + \text{ى ط} \cdots \text{٦ل} + \cdots\cdots$$

أعنى ان مشتقة حاصل ضرب متعلقات عددها ن فى بعضها أو تفاضله يعادل مشتقة الاولى أو تفاضلها فى حاصل ضرب المتعلقات الباقية زائدا مشتقة الثانية أو تفاضلها فى حاصل ضرب المتعلقات الباقية زائدا مشتقة الثالثة أو

تفاضلها

تفاضلها فى حاصل ضرب المتعلقات الباقية وهذا الى المتعلقة الموالية

(فى مشتقة خارج القسمة وتفاضله)

(١٥) اذا فرضنا ان $\text{ص} = \frac{\text{ى}}{\text{ط}}$ خارج قسمة المتعلقتين ى و ط بالمستقلة س يحدث

$$\text{ف ص} = \frac{\text{ى} + \text{ف ى}}{\text{ط} + \text{ف ط}} - \frac{\text{ى}}{\text{ط}} = \frac{\text{ط ف ى} - \text{ى ف ط}}{\text{ط}(\text{ط} + \text{ف ط})}$$

و بقسمة كل من الطرفين على ف س نجد

$$\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}} = \frac{\text{ط}\,\frac{\text{ف ى}}{\text{ف س}} - \text{ى}\,\frac{\text{ف ط}}{\text{ف س}}}{\text{ط}(\text{ط} + \text{ف ط})}$$

فاذا فرضت ف س كمية صغيرة جدا انعدمت ف ط وآلت المعادلة الى

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{\text{ط}\,\frac{\text{ء ى}}{\text{ء س}} + \text{ى}\,\frac{\text{ء ط}}{\text{ء س}}}{\text{ط}^2}$$

ومنها

$$\text{ء ص} = \frac{\text{ط ء ى} - \text{ى ء ط}}{\text{ط}^2}$$

اعنى ان مشتقة خارج القسمة أو تفاضله يعادل حاصل ضرب مشتقة المقسوم أو تفاضله فى المقسوم عليه ناقصا حاصل ضرب مشتقة المقسوم عليه أو تفاضله فى المقسوم مقسوما باقيه على مربع المقسوم عليه

(فى مشتقة متعلقة بمتعلقة وتفاضلها)

(١٦) اذا فرضنا ان $\text{ص} = \text{م}(\text{ط})$ و $\text{ط} = \text{م}(\text{س})$ وان س هى المتغيرة المستقلة يقال ان ص متعلقة بمتعلقة فلايجاد مشتقتها أو تفاضلها بالنسبة الى س يكفى وضع مقدار ط فى المعادلة الاولى فتصير $\text{ص} = \text{م}[\text{م}(\text{س})]$ ثم يجرى العمل كما تقدم

وهنا طريقة أخرى وهى ان نفرض أولا المطابقة

$$\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}} = \frac{\text{ف ص}}{\text{ف ط}} \times \frac{\text{ف ط}}{\text{ف س}}$$

وحيث ان $\text{نها}\,\frac{\text{ف ط}}{\text{ف س}} = \text{مَ}(\text{س})$ و $\text{نها}\,\frac{\text{ف ص}}{\text{ف ط}} = \text{مَ}(\text{ط})$

يكون حينئذ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \text{مَ}(\text{ط})\ \text{مَ}(\text{س})$ (١)

فيؤخذ من هذا ان مشتقة متعلقة بمتعلقة تساوى حاصل ضرب مستقى المتعلقتين . وهذه القاعدة تجرى على متعلقة بمتعلقة بمتعلقة الخ .

ومن القانون (١) ينتج ‎ $ ى ص = م َ (ط) مَ (س) ى س $ ‎ وهو التفاضل (فى مشتقة المتعلقة المركبة وتفاضلها)

(١٧) اذا كانت ط و ل متعلقتين بالمستقلة س وكانت ص = م (ط ر ل) يقال ان ص متعلقة مركبة بالمتغيرة س فلتحصيل على مشتقها نقول اذا زادت س بالمقدار ف س زادت المتعلقتان ط و ل مقابلة لذلك كما تقدم ويحدث

$$ ف ص = م (ط + ف ط ر ل + ف ل) - م (ط ر ل) $$

ويفرض ل كمية ثابتة وأخذ مَ ط (ط ر ل) رمزا لمشتقة مَ (ط ر ل) اعنى ص بالنسبة الى ط يحدث بناء على ما فى المطلب ٩

$$ م (ط + ف ط ر ل) = م (ط ر ل) + ف ط [مَ_ط (ط ر ل) + ى] (١) $$

ى كمية تنعدم اذا فرضت ف ط صغيرة جدا وصارت ى ط وكذلك اذا فرضنا أن الثابتة هى ط ورمزنا بالرمز مَ ل (ط ر ل) لمشتقة م (ط ر ل) بالنسبة الى ل نجد

$$ م (ط ر ل + ف ل) = م (ط ر ل) + ف ل [مَ_ل (ط ر ل) + د] $$

(د كمية تنعدم اذا اصغرت ف ل وصارت ى ل) وبوضع ط + ف ط بدلا عن ط فى هذه المعادلة الاخيرة تتغير د وتصير دَ مثلا ويكون حينئذ

$$ م (ط + ف ط ر ل + ف ل) = م (ط + ف ط ر ل) $$
$$ + ف ل [مَ_ل (ط + ف ط ر ل) + دَ] $$

فاذا وضعنا فى هذه المعادلة بدلا عن م (ط + ف ط ر ل) مقدارها فى المعادلة (١) ينتج

$$ ف ص = ف ط [مَ_ط (ط ر ل) + ى] + ف ل [مَ_ل (ط + ف ط ر ل) + دَ] $$

وبقسمة كل من الطرفين على ف س يوجد

$$ \frac{ف ص}{ف س} = \frac{ف ط}{ف س} [مَ_ط (ط ر ل) + ى] + \frac{ف ل}{ف س} [مَ_ل (ط + ف ط ر ل) + دَ] $$

ويأخذ

وبأخذ النهايات يصير

$$\frac{\text{ك}\,\text{ص}}{\text{ك}\,\text{س}} = \text{م}'_{\text{ط}}(\text{ط}\text{،}\text{ل})\frac{\text{ك}\,\text{ط}}{\text{ك}\,\text{س}} + \text{م}'_{\text{ل}}(\text{ط}\text{،}\text{ل})\frac{\text{ك}\,\text{ل}}{\text{ك}\,\text{س}} \qquad (٢)$$

ولو أخذنا عوضا عن $\text{م}'_{\text{ط}}$ و $\text{م}'_{\text{ل}}$ قيمتهما يكون

$$\frac{\text{ك}\,\text{ص}}{\text{ك}\,\text{س}} = \frac{\text{ك}\,\text{ص}}{\text{ك}\,\text{ط}}\cdot\frac{\text{ك}\,\text{ط}}{\text{ك}\,\text{س}} + \frac{\text{ك}\,\text{ص}}{\text{ك}\,\text{ل}}\cdot\frac{\text{ك}\,\text{ل}}{\text{ك}\,\text{س}} \qquad (٣)$$

وهي المشتقة

(تنبيه) اعلم أن في هذه المعادلة معنى $\text{ك}\,\text{ل}$ في $\frac{\text{ك}\,\text{ص}}{\text{ك}\,\text{ل}}$ غير معناها في $\frac{\text{ك}\,\text{ل}}{\text{ك}\,\text{س}}$ لانها في الكمية الاولى تدل على زيادة صغيرة جدا للمتغيرة ل باعتبارها مستقلة وأما في الثانية فتدل على تفاضل ل باعتبارها متعلقة بالمتغيرة س فلا يلزم حينئذ محوهما وكذلك ك ط

ومن المعادلة (٣) ينتج $\text{ك}\,\text{ص} = \frac{\text{ك}\,\text{ص}}{\text{ك}\,\text{ط}}\,\text{ك}\,\text{ط} + \frac{\text{ك}\,\text{ص}}{\text{ك}\,\text{ل}}\,\text{ك}\,\text{ل}$ وهو التفاضل

واذا كانت $\qquad \text{ص} = \text{م}(\text{ط}\text{،}\text{ل}\text{،}\text{ع}\text{،}\cdots)$

فنجد أيضا

$$\frac{\text{ك}\,\text{ص}}{\text{ك}\,\text{س}} = \frac{\text{ك}\,\text{ص}}{\text{ك}\,\text{ط}}\cdot\frac{\text{ك}\,\text{ط}}{\text{ك}\,\text{س}} + \frac{\text{ك}\,\text{ص}}{\text{ك}\,\text{ل}}\cdot\frac{\text{ك}\,\text{ل}}{\text{ك}\,\text{س}} + \frac{\text{ك}\,\text{ص}}{\text{ك}\,\text{ع}}\cdot\frac{\text{ك}\,\text{ع}}{\text{ك}\,\text{س}} + \cdots \text{الخ}$$

ومنها

$$\text{ك}\,\text{ص} = \frac{\text{ك}\,\text{ص}}{\text{ك}\,\text{ط}}\,\text{ك}\,\text{ط} + \frac{\text{ك}\,\text{ص}}{\text{ك}\,\text{ل}}\,\text{ك}\,\text{ل} + \frac{\text{ك}\,\text{ص}}{\text{ك}\,\text{ع}}\,\text{ك}\,\text{ع} + \cdots \text{الخ}$$

اعني ان مشتقة أو تفاضل متعلقة مركبة بجملة متغيرات متعلقة بالمستقلة س يساوي حاصل ضرب مشتقة أو تفاضل المتعلقة الاولى في مشتقة المتعلقة المركبة بالنسبة اليها زائدا حاصل ضرب مشتقة أو تفاضل الثانية في مشتقة المتعلقة المركبة بالنسبة اليها وهكذا

الباب الثالث

في نهاية $(١ + \frac{١}{\text{ع}})^{\text{ع}}$

(١٨) البحث عن تفاضل لغا س يتعلق (١) بمعرفة نهاية الكمية $(١ + \frac{١}{\text{ع}})^{\text{ع}}$

---

(١) رمزنا بالعلامة لغا اللوغاريتم البرجسي أي الذي اساسه ١٠ وبالعلامة لغ للنبرياني كما سيأتي

المفروض فيها ان ء تزيد الى غير نهاية . ولذلك نفرض ان مقدار ء موجب ونرمز بالحرف ح لاكبر عدد صحيح مشتمل عليه ء وبالحرف غ الكسر الباقي فيكون ء = ح + غ ويكون

$$(١+\frac{١}{ء})^{ء}=(١+\frac{١}{ء})^{ح+ع}=(١+\frac{١}{ء})^{ح}\cdot(١+\frac{١}{ء})^{ع}$$

واذا بسطنا الكمية ذات الحدين $(١+\frac{١}{ء})^{ح}$ بموجب قانون نيوتن نجد

$$(١+\frac{١}{ء})^{ح}=١+\frac{ح}{١}\cdot\frac{١}{ء}+\frac{ح(ح-١)}{١\cdot٢}\cdot\frac{١}{ء^{٢}}+\frac{ح(ح-١)(ح-٢)}{١\cdot٢\cdot٣}\frac{١}{ء^{٣}}+\cdots\cdot$$

وبضرب الطرف الثاني في ح وقسمته عليه يكون

$$(١+\frac{١}{ء})^{ح}=١+\frac{ح}{ء}+\frac{١-\frac{١}{ح}}{١\cdot٢}(\frac{ح}{ء})^{٢}+\frac{(١-\frac{١}{ح})(١-\frac{٢}{ح})}{١\cdot٢\cdot٣}(\frac{ح}{ء})^{٣}+\cdots\cdots$$

وينتج من المعادلة ء = ح + ع ان $\frac{ح}{ء}=١-\frac{ع}{ء}$ فيقرب $\frac{ح}{ء}$ من الواحد كلما زادت كمية ء فاذا فرضنا ان $\frac{ح}{ء}$ = هـ يحدث

$$(١+\frac{١}{ء})^{ء}=١+هـ+\frac{١-\frac{١}{ح}}{١\cdot٢}هـ^{٢}+\frac{(١-\frac{١}{ح})(١-\frac{٢}{ح})}{١\cdot٢\cdot٣}هـ^{٣}+\cdots\cdots \text{الخ}$$

ويأخذ ع ن رمز للعدد النوني أعني الحد الذي قبله حدود عددها ن يكون

$$ع_{ن}=\frac{(١-\frac{١}{ح})(١-\frac{٢}{ح})\cdots\cdot(١-\frac{ن-١}{ح})}{١\cdot٢\cdots ن}هـ^{ن}$$

والحدود التي بعده تكون

$$ع_{ن+١}=\frac{١-\frac{ن}{ح}}{ن+١}ع_{ن}هـ \quad و \quad ع_{ن+٢}=\frac{(١-\frac{ن}{ح})(١-\frac{ن+١}{ح})}{(ن+١)(ن+٢)}ع_{ن}هـ^{٢}$$

وبترك الكميات السالبة وأخذ الواحد بدلا عن هـ في البسوط وعوضا عن ن+٢ و ن+٣ في المقامات العدد الاصغر ن+١ تكبر الاطراف الثانية أعني ان

$$ع_{ن+١}<\frac{ع_{ن}}{ن+١} \quad و \quad ع_{ن+٢}<\frac{ع_{ن}}{(ن+١)^{٢}}$$

ومنه $ح_ن + ح_{ن+1} + ح_{ن+2} + \cdots <$
$ح_ن \left[1 + \frac{1}{ن+1} + \frac{1}{(ن+1)^2} + \frac{1}{(ن+1)^3} + \cdots\cdots\right]$

بفرض ان عدد الحدود فى الطرف الثانى يكون غير نهائى

وحيث أن الكمية بين القوسين متوالية هندسية أساسها $\frac{1}{ن+1}$ وحاصل جمعها

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{ن+1}} = 1 + \frac{1}{ن}$$

تؤول المتباينة الاخيرة الى

$$ح_ن + ح_{ن+1} + ح_{ن+2} + ح_{ن+3} + \cdots < ح_ن\left(1 + \frac{1}{ن}\right)$$

واذا رمزنا بالحرف و لعدد اصغر من $\frac{1}{ن}$ حيث يكون

$$ح_ن + ح_{ن+1} + ح_{ن+2} + ح_{ن+3} + \cdots = ح_ن(1 + و)$$

نجد

$$\left(1 + \frac{1}{ع}\right)^{ع} = \Bigg(1 + 1 + \frac{1 - \frac{1}{ع}}{2!} + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{\left(1 - \frac{1}{ع}\right)\cdots\left(1 - \frac{ن-1}{ع}\right)}{ن!}(1 + و)\Bigg)\left(1 + \frac{1}{ع}\right)^{ع}$$

بفرض دائما ان $و < \frac{1}{ن}$. فبواسطة هذه المتسلسلة نجد النهاية المطلوبة بغاية التقريب وحيث ان الباقى $\frac{و}{ن!}$ يقرب من الصفر كلما كبر ن نجد

اذا رمزنا بالهاء السريانية ه لهذه النهاية

$$ه = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots\cdots \text{ الخ}$$

بفرض ان المتسلسلة تمتد الى ما لا نهاية . فاذا اقتصرنا على العشرة حدود الاول نجد

$$ه = 2{,}7182818$$

ولنفرض الآن ان ع عدد سالب مساو الى — عَ — ١ فيحدث

$$\left(1+\frac{1}{\text{ء}}\right)^{\text{ء}}=\left(1-\frac{1}{\text{ءَ}+1}\right)^{-\text{ءَ}-1}=\left(1+\frac{1}{\text{ءَ}}\right)\left(1+\frac{1}{\text{ءَ}}\right)^{\text{ءَ}}$$

وبجعل ءَ = ∞ يكون

نها $\left(1+\frac{1}{\text{ءَ}}\right)=1$ ومنه أيضا كما تقدم نها $\left(1+\frac{1}{\text{ءَ}}\right)^{\text{ءَ}}=\text{ه}$

في تفاضل لوغاريتم (س)

١٩. اذا كان ص = لغا س يكون

$$\text{ف ص}=\text{لغا}(\text{س}+\text{ف س})-\text{لغا س}=\text{لغا}\left(1+\frac{\text{ف س}}{\text{س}}\right)$$

وبقسمة كل من الطرفين على ف س يحدث

$$\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}}=\frac{\text{لغا}\left(1+\frac{\text{ف س}}{\text{س}}\right)}{\text{ف س}}=\frac{1}{\text{س}}\cdot\frac{\text{س}}{\text{ف س}}\,\text{لغا}\left(1+\frac{\text{ف س}}{\text{س}}\right)=\frac{1}{\text{س}}\,\text{لغا}\left(1+\frac{\text{ف س}}{\text{س}}\right)^{\frac{\text{س}}{\text{ف س}}}$$

واذا فرضنا ان $\frac{\text{س}}{\text{ف س}}$ = ء يكون

$$\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}}=\frac{1}{\text{س}}\,\text{لغا}\left(1+\frac{1}{\text{ء}}\right)^{\text{ء}}$$

وكلما صغر ف س كبر ء فبأخذ النهايتين يحدث

$$\frac{\text{ٯ ص}}{\text{ٯ س}}=\text{نها}\,\frac{1}{\text{س}}\,\text{لغا}\left(1+\frac{1}{\text{ء}}\right)^{\text{ء}}=\frac{1}{\text{س}}\,\text{لغا ه}$$

ومنها $\text{ٯ ص}=\frac{1}{\text{س}}\,\text{لغا ه}\;\text{ٯ س}$ وهو التفاضل

واذا كان ه أساس اللوغاريتم سمى اللوغاريتم نيربانيا ويرمز له بالرمز لع فيكون لع ه = ١ وحينئذ تؤل المعادلة السابقة الى

$\text{ٯ ص}=\frac{\text{ٯ س}}{\text{س}}$ ومنها $\frac{\text{ٯ ص}}{\text{ٯ س}}=\frac{1}{\text{س}}$

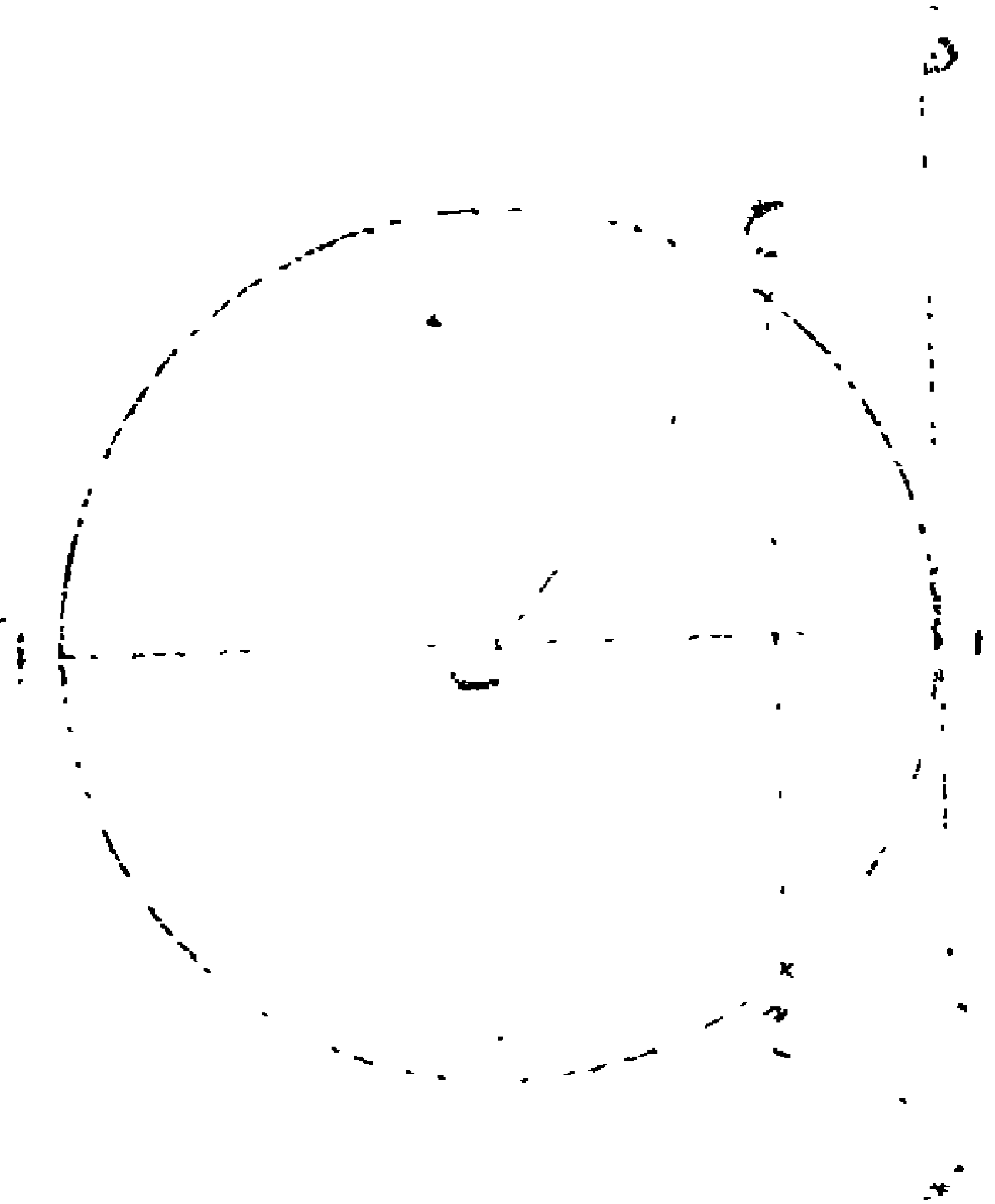
في تفاضل جيب (س)

٢٠. ليعلم ان خطوط القوس المساحيه ونفس القوس س منسوبة الى دائرة نصف قطرها يساوى واحدا ليكن (شـ ٢) ا ج = س قوس أصغر من ربع محيط الدائرة فيكون

وتر ج جَ < قوس ج ا جَ أعني ٢ جا س < ٢ س

ومنه جا س < س (١)

وحيث ان قطع الدائرة ج ا جَ ب أصغر من المثلث هـ د ب فيكون



$$\text{قوس ج جَ}\times\frac{\text{اب}}{٢} < \text{هـ د} + \frac{\text{اب}}{٢}$$

ومن هذا يؤخذ ان

$$\frac{\text{قوس ج جَ}}{٢} < \frac{\text{هـ و}}{٢} \quad \text{او} \quad \text{س} < \text{جاس}$$

ومنها

$$\frac{\text{حاس}}{\text{س}} > \text{جتا س}$$

وينتج من هذه المتباينة والمتباينة (١) ان

$$١ > \frac{\text{حاس}}{\text{س}} > \text{جتا س}$$

ومن المعلوم انه كلما قرب القوس س من الصفر قرب جتا س من الواحد فحينئذ يكون نها $\frac{\text{حاس}}{\text{س}} = ١$. ولنفرض الآن ان ص = حاس فيحدث

$$\text{ف ص} = \text{حا}(\text{س} + \text{ف س}) - \text{حاس}$$

وبموجب قانون معلوم من حساب المثلثات تؤل هذه المعادلة الى هذه

$$\text{ف ص} = ٢\ \text{جا}\frac{\text{ف س}}{٢}\ \text{جتا}\left(\text{س} + \frac{\text{ف س}}{٢}\right)$$

أو

$$\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}} = \frac{\left(\text{جا} \frac{\text{ف س}}{٢}\right)}{\left(\frac{\text{ف س}}{٢}\right)} \text{جتا} \left(\text{س} + \frac{\text{ف س}}{٢}\right)$$

وحيث ان

$$\text{نها} \frac{\text{جا} \frac{\text{ف س}}{٢}}{\frac{\text{ف س}}{٢}} = ١$$

يكون

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{جتا س}$$

ومنه

$$\text{د ص} = \text{جتا س د س}$$

وهو التفاضل

القواعد السابقة تكفى لايجاد تفاضل أى متعلقة كانت

الباب الرابع
فى تفاضل المتعلقات الجبرية الظاهرة

٢١ • قد علم فيما سبق تفاضل المتعلقة $\text{ص} = \text{س}^{\text{م}}$ بفرض م عددا صحيحا موجبا فاذا اريد معرفته بفرضه عددا حيثما اتفق لكنه حقيقى غير تخيلى يؤخذ اللوغاريتم النبرى لكل من الطرفين فيوجد

$$\text{لغ ص} = \text{م لغ س}$$

وبأخذ تفاضلى طرفى هذه المعادلة يحدث

$$\frac{\text{د ص}}{\text{ص}} = \text{م} \frac{\text{د س}}{\text{س}} \quad \text{أو} \quad \text{د ص} = \text{م ص} \frac{\text{د س}}{\text{س}}$$

وبوضع $\text{س}^{\text{م}}$ عوضا عن ص ينتج

$$\text{د ص} = \text{م س}^{\text{م}-١} \text{د س}$$

وهو التفاضل . فالقاعدة واحدة فى الحالتين . أعنى انه يوجد تفاضل كمية مرفوعة لقوة ما م يضربها فى الاس م وطرح الواحد من اسها (فيصير م ـ ١) وضرب الحاصل فى تفاضلها

أمثلة

١ $\quad \text{د} . \text{س}^{٦} = ٦ \text{س}^{٦-١} \text{د س} = ٦ \text{س}^{٥} \text{د س}$

٢ $\text{ت} \cdot \text{س}^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3}\text{س}^{\frac{4}{3}-1}\text{ت س} = \frac{4}{3}\text{س}^{\frac{1}{3}}\text{ت س}$

٣ $\text{ت} \cdot \text{س}^{-1} = -\text{س}^{-2}\text{ت س}$

٤ $\text{ت} \cdot \sqrt{\text{س}} = \text{ت} \cdot \text{س}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\text{س}^{-\frac{1}{2}}\text{ت س} = \frac{\text{ت س}}{2\sqrt{\text{س}}}$

وينتج من المثال الاخير ان تفاضل الجزر التربيعي لمتغير يعادل تفاضل هذا المتغير مقسوما على ضعف الجزر

تمرينات

١ $\text{ص} = \frac{\text{س}^{\text{ن}}}{(1+\text{س})^{\text{ن}}}$ الجواب $\text{ت ص} = \frac{\text{ن س}^{\text{ن}-1}\text{ت س}}{(1+\text{س})^{\text{ن}+1}}$

٢ $\text{ص} = (\text{ح}^{2} - \text{ى س} + \text{س}^{2})(\text{ح}^{2} + \text{ى س} + \text{س}^{2})$ الجواب $\text{ت ص} = 4\text{س}^{3}\text{ت س}$

٣ $\text{ص} = \frac{\text{ا} + \text{ب س} + \text{ح س}^{2}}{\text{ا}' + \text{ب}'\text{س} + \text{ح}'\text{س}^{2}}$ الجواب

$$\text{ت ص} = \frac{(\text{ا}'\text{ب} - \text{ا}\text{ب}') + 2(\text{ا}'\text{ح} - \text{ا}\text{ح}')\text{س} + (\text{ب}'\text{ح} - \text{ح}'\text{ب})\text{س}^{2}}{(\text{ا}' + \text{ب}'\text{س} + \text{ح}'\text{س}^{2})^{2}}\text{ت س}$$

٤ $\text{ص} = (9\text{ب}^{2} - 12\text{ب ح س} + 5\text{ح}^{2}\text{س}^{2})(\text{ب} + \text{ح س})^{\frac{2}{3}}$ الجواب

$$\text{ت ص} = \frac{40}{3} \cdot \frac{\text{ح}^{3}\text{س}^{2}}{(\text{ب} + \text{ح س})^{\frac{1}{3}}}\text{ت س}$$

فى تفاضل المتعلقات اللوغارتيمية والاسية

٢٢ . لايجاد تفاضل متعلقة لوغارتمية نفرض ان ص = لع ط وان ط = م (س) ثم نقول تقدم ان

$$\text{ت} \cdot \text{لع س} = \frac{\text{ت س}}{\text{س}}$$

فبناء عليه يكون $\text{ت ص} = \text{ت} \cdot \text{لع ط} = \frac{\text{ت ط}}{\text{ط}}$ (١)

فاذا أخذ تفاضل المعادلة ط = م (س) يحدث ت ط = مَ (س) ت س وبوضع

مقداري ٯط و ط في المعادلة (١) بدلا عنهما نجد

$$\text{ٯ . لع ط} = \frac{\text{م}'(\text{س})}{\text{م}(\text{س})}\,\text{ٯس}$$ وهو المطلوب

ليكن مثلا $\text{ص} = \text{لع ط}$ و $\text{ط} = \text{س} + \sqrt{\text{ح}^{2} + \text{س}^{2}}$ فنجد

$$\text{ٯص} = \frac{\text{ٯس}}{\sqrt{\text{ح}^{2} + \text{س}^{2}}}$$

ولايجاد تفاضل متعلقة اسية نفرض $\text{ص} = \text{ح}^{\text{س}}$ (ح عدد موجب) ثم تأخذ لوغاريتمي الطرفين فيحدث

$\text{لع ص} = \text{س لع ح}$ ومنه $\frac{\text{ٯص}}{\text{ص}} = \text{لع ح ٯس}$ او $\text{ٯص} = \text{ص لع ح ٯس}$

وبوضع $\text{ح}^{\text{س}}$ عوضا عن ص نجد

$$\text{ٯ . ح}^{\text{س}} = \text{ح}^{\text{س}}\,\text{لع ح ٯس}$$ وهو المطلوب

ومن هذا القانون ينتج

$$\frac{\text{ٯ . ح}^{\text{س}}}{\text{ٯس}} = \text{ح}^{\text{س}}\,\text{لع ح}$$

فاذا فرضنا ان $\text{ح} = \text{ه}$ يكون $\text{لع ح} = \text{لع ه} = 1$ (مطلب ١٩) ومنه

$$\frac{\text{ٯ . ه}^{\text{س}}}{\text{ٯس}} = \text{ه}^{\text{س}}$$

أعني ان مشتقة $\text{ه}^{\text{س}}$ تساويها

وبمثل ما ذكر يوجد ان $\text{ٯ . ب}^{\text{ط}} = \text{ب}^{\text{ط}}\,\text{. لع ب . ٯط}$

أمثلة

١. $\text{ص} = \text{لع}\,(1 - \text{س}^{2})$ فنجد $\text{ٯص} = \frac{\text{ٯ . }(1 - \text{س}^{2})}{1 - \text{س}^{2}} = -\frac{2\,\text{س}}{1 - \text{س}^{2}}\,\text{ٯس}$

٢. $\text{ص} = (\text{لع س})^{\text{س}^{2}}$ فنضع $\text{ط} = \text{لع س}$ و $\text{ل} = \text{س}^{2}$ فتؤول المعادلة الى $\text{ص} = \text{ط}^{\text{ل}}$ وبمقتضى القانون (٢) من المطلب ١٧ يحدث

$$\text{ٯص} = \text{ل ط}^{\text{ل}-1}\,\text{ٯط} + \text{ط}^{\text{ل}}\,\text{. لع ط ٯل}$$

ومنه $\text{ٯص} = \text{س}\,(\text{لع س})^{\text{س}^{2}-1}\,\text{ٯس} + \text{لع}(\text{لع س})\,.\,(\text{لع س})^{\text{س}^{2}}\,2\,\text{س ٯس}$

تمرينات

١ . $\text{ص} = \text{لع}(\text{لع}\,\text{س})$ الجواب $\text{د}\text{ص} = \frac{\text{د}\text{س}}{\text{س}\,\text{لع}\,\text{س}}$

٢ . $\text{ص} = \text{لع}\left[\frac{\text{ب}}{٢} + \text{س} + (١ + \text{ب}\text{س} + \text{س}^{٢})^{\frac{١}{٢}}\right]$ الجواب $\text{د}\text{ص}$

$$= (١ + \text{ب}\text{س} + \text{س}^{٢})^{-\frac{١}{٢}}$$

٣ . $\text{ص} = (\text{ه}^{\text{س}})^{\text{ه}^{\text{س}}}$ الجواب $\text{د}\text{ص} = (\text{ه}^{\text{س}})^{\text{ه}^{\text{س}} - ١}(١ + \text{س})\,\text{د}\text{س}$

٤ . $\text{ص} = \text{لع}\,\frac{\text{ا}\text{ه}^{\text{س}} - \text{ب}}{\text{ا}\text{ه}^{\text{س}} + \text{ب}}$ الجواب $\text{د}\text{ص} = \frac{٢\text{ا}\text{ب}\,\text{د}\text{س}}{\text{ا}^{٢}\text{ه}^{٢\text{س}} - \text{ب}^{٢}}$

فى تفاضل المتعلقات الدائرية

٢٣ . لتكن ط متعلقة بالمستقلة س فيكون بناء على ما تقدم

$$\text{د}\,\text{حا}\,\text{ط} = \text{جتا}\,\text{ط}\,\text{د}\text{ط}$$

وللتحصيل على تفاضل جتا ط نفرض $\text{ط} = \frac{\text{ق}}{٢} - \text{ى}$ فبنتج

$$\text{جتا}\,\text{ط} = \text{جتا}\left(\frac{\text{ق}}{٢} - \text{ى}\right) = \text{حا}\,\text{ى}$$

ويكون $\text{د}\,.\,\text{جتا}\,\text{ط} = \text{د}\,.\,\text{حا}\,\text{ى} = \text{جتا}\,\text{ى}\,\text{د}\text{ى} = \text{حا}\,\text{ط}\,\text{د}\left(\frac{\text{ق}}{٢} - \text{ط}\right)$

ومنه $\text{د}\,.\,\text{جتا}\,\text{ط} = -\text{حا}\,\text{ط}\,\text{د}\text{ط}$. وهو المطلوب

واذا أريد البحث عن تفاضل ظا ط نفرض ان $\text{ص} = \text{ظا}\,\text{ط}$ فيكون كما هو معلوم

$$\text{د}\text{ص} = \text{د}\,.\,\frac{\text{حا}\,\text{ط}}{\text{جتا}\,\text{ط}} = \frac{\text{جتا}\,\text{ط}\,\text{د}\,.\,\text{حا}\,\text{ط} - \text{حا}\,\text{ط}\,\text{د}\,.\,\text{جتا}\,\text{ط}}{\text{جتا}^{٢}\,\text{ط}}$$

أو

$$\text{د}\text{ص} = \frac{\text{جتا}^{٢}\,\text{ط} + \text{حا}^{٢}\,\text{ط}}{\text{جتا}^{٢}\,\text{ط}}\,\text{د}\text{ط}$$

ومنه

$$\text{د}\text{ص} = \frac{\text{د}\text{ط}}{\text{جتا}^{٢}\,\text{ط}}$$

وبهذه الطريقة نجد ان $\text{د}\,.\,\text{ظتا}\,\text{ط} = -\frac{\text{د}\text{ط}}{\text{حا}^{٢}\,\text{ط}}$

وبواسطة قانونين معلومين من حساب المثلثات وهما $\text{قا ط} = \frac{1}{\text{جتا ط}}$

و $\text{قتا ط} = \frac{1}{\text{جا ط}}$ ويعلم بالسهولة تفاضل القاطع وقاطع التمام فيكون

$\partial\ .\ \text{قا ط} = \frac{\text{جا ط}}{\text{جتا}^2\text{ ط}}\,\partial\text{ط}$ و $\partial\ .\ \text{قتا ط} = -\frac{\text{جتا ط}}{\text{جا}^2\text{ ط}}\,\partial\text{ ط}$

واذا فرضنا ان ص قوس جيبه ط يكتب

$\text{ص} = \text{قو جا ط}$ (١)

ومنه $\text{ط} = \text{جا ص}$ فبأخذ التفاضل يحدث $\partial\text{ ط} = \text{جتا ص}\,\partial\text{ ص}$ وحيث

ان $\text{ط} = \text{جا ص}$ يكون كاه ومعلوم $\text{جتا ص} = \sqrt{1 - \text{ط}^2}$ وحينئذ

$$\partial\text{ ص} = \frac{\partial\text{ط}}{\sqrt{1 - \text{ط}^2}}$$

وهو المطلوب

اما اذا كان $\text{ص} = \text{قو جتا ط}$ لوجدنا

$$\partial\text{ ص} = \frac{\partial\text{ط}}{\text{جتا ط}} = -\frac{\partial\text{ط}}{\sqrt{1 - \text{ط}^2}}$$ وهو التفاضل

واذا كان $\text{ص} = \text{قو ظا ط}$ يكون $\text{ط} = \text{ظا ص}$ ومنه $\partial\text{ ط} = \frac{\partial\text{ص}}{\text{جتا}^2\text{ ص}}$

وحيث ان $\text{جتا}^2\text{ ص} = \frac{1}{1 + \text{ظا}^2\text{ ص}} = \frac{1}{1 + \text{ط}^2}$

ينتج $\partial\text{ص} = \frac{\partial\text{ط}}{1 + \text{ط}^2}$ وهو المطلوب

وان كان $\text{ص} = \text{قو ظتا ط}$ لوجد بمثل ما تقدم

$$\partial\text{ص} = -\frac{\partial\text{ط}}{1 + \text{ط}^2}$$

امثلة

١ $\text{ص} = \text{قو جا}\ \frac{\text{س}}{\sqrt{1 + \text{س}^2}}$ بجعل $\frac{\text{س}}{\sqrt{1 + \text{س}^2}} = \text{ط}$ ومنه

$\text{ص} = \text{قو جا ط}$ و $\partial\text{ ص} = \frac{\partial\text{ط}}{\sqrt{1 - \text{ط}^2}}$

(١) المتعلقات قو جا و قو جتا و قو ظا الخ تسمى دائرية عكسية

و $ء\text{ط} = \frac{ء\text{س}}{(١+\text{س}^٢)\sqrt{١+\text{س}^٢}}$ فحينئذ يكون $ء\text{ص} = \frac{ء\text{س}}{١+\text{س}^٢}$

٢. $\text{ص} = \text{قو طا} \frac{\text{س}}{\sqrt{١-\text{س}^٢}}$ فتضع $\text{ط} = \frac{\text{س}}{\sqrt{١-\text{س}^٢}}$ فتكون

$$ء\text{ص} = \frac{ء\text{س}}{(١-\text{س}^٢)\sqrt{١-\text{س}^٢}}$$

و $ء\text{ط} = \frac{ء\text{س}}{(١-\text{س}^٢)\sqrt{١-\text{س}^٢}}$ فاذا يكون $ء\text{ص} = \frac{ء\text{س}}{\sqrt{١-\text{س}^٢}}$

٣. $\text{ص} = \frac{١}{١+\text{ح ظا س}}$ فنجد $ء\text{ص} = -\frac{\text{ح} \, ء\text{ظا س}}{(١+\text{ح ظا س})^٢}$

$$= -\frac{\text{ح} \, ء\text{س}}{\text{جتا}^٢\text{س} \, (١+\text{ح طا س})^٢}$$

$$= -\frac{\text{ح} \, ء\text{س}}{(\text{جتا س} + \text{ح حا س})^٢} .$$

— (تمرينات) —

١. $\text{ص} = \text{طا س} + \frac{١}{٣}\text{طا}^٣\text{س}$ الجواب $ء\text{ص} = \frac{ء\text{س}}{\text{جتا}^٤\text{س}}$

٢. $\text{ص} = \text{ه}^{\text{حس}} \, \text{جتا ب س}$ الجواب $ء\text{ص} = \text{ه}^{\text{حس}} (\text{ح جتا ب س} - \text{ب حا ب س}) \, ء\text{س}$

٣. $\text{ص} = \text{ه}^{\text{قو جا س}}$ الجواب $ء\text{ص} = \frac{\text{ه}^{\text{قو جا س}}}{(١-\text{س}^٢)^{\frac{١}{٢}}} ء\text{س}$

٤. $\text{ص} = \text{لع طا} \left(\frac{\text{ط}}{٤} + \frac{\text{س}}{٢}\right)$ الجواب $ء\text{ص} = \frac{ء\text{س}}{\text{جتا س}}$

٥. $\text{ص} = \text{قو طا} \frac{\text{س}}{(١-\text{س}^٢)^{\frac{١}{٢}}}$ الجواب

$$ء\text{ص} = \frac{ء\text{س}}{(١-\text{س}^٢)^{\frac{١}{٢}}}$$

٠٦ $\text{ص} = \frac{٣}{٢}\text{س} + \left(\frac{٣}{٢}\text{جتا س} + \text{جتا}^{٢}\text{س}\right)\text{جا س}$ الجواب

$$\text{ءص} = ٤\ \text{جتا}^{٤}\text{س}\ \text{ءس}$$

٠٧ $\text{ص} = \text{س}\ \text{جتا}\left(\text{لو س} - \frac{\text{ط}}{٢}\right)$ الجواب

$$\text{ءص} = \sqrt{٢}\ \text{جتا}\ (\text{لو س})\ \text{ءس}$$

٠٨ $\text{ص} = \text{قو طا}\left[\left(\frac{\text{ح} - \text{ے}}{\text{ح} + \text{ے}}\right)^{\frac{١}{٢}} \text{طا}\ \frac{\text{س}}{٢}\right]$ الجواب

$$\text{ءص} = \frac{١}{٢} \times \frac{(\text{ح}^{٢} - \text{ے}^{٢})^{\frac{١}{٢}}\ \text{ءس}}{\text{ح} + \text{ے جتا س}}$$

الباب الخامس

في تفاضل المتعلقات المضمرة

٢٤٠ لتكن ص متعلقة بالمستقلة س مبينة بالمعادلة

$$\text{م}\ (\text{س}\ ،\ \text{ص}) = ٠$$

فلايجاد المشتقة $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ بدون حل هذه المعادلة نعتبر المتعلقة مركبة ونضع $\text{ط} = \text{م}\ (\text{س}،\text{ص})$ فنجد بموجب ماقلنا في المطلب ١٧

$$\text{ءط} = \frac{\text{ءم}}{\text{ءس}}\ \text{ءس} + \frac{\text{ءم}}{\text{ءص}}\ \text{ءص}$$

وحيث $\text{ط} = ٠$ فيكون أيضا $\text{ءط} = ٠$ ويؤل القانون الاخير الى

$$\frac{\text{ءم}}{\text{ءس}}\ \text{ءس} + \frac{\text{ءم}}{\text{ءص}}\ \text{ءص} = ٠$$

ومنه

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\frac{\frac{\text{ءم}}{\text{ءس}}}{\frac{\text{ءم}}{\text{ءص}}}$$ وهي المشتقة

ومنها

$$\text{ءص} = -\frac{\frac{\text{ءم}}{\text{ءس}}}{\frac{\text{ءم}}{\text{ءص}}}\ \text{ءس} \quad (١)$$ وهو التفاضل

ليكن

ليكن مثلاً $م(س، ص) = س^٢ ص - س ص^٢ + ح$

فنجد $\frac{ءم}{ءس} = (٢س - ص) ص$

$\frac{ءم}{ءص} = -(٢ص - س) س$

وبموجب القانون (١) يكون

$$ءص = \frac{ص(٢س-ص)}{س(٢ص-س)} ءس$$

وإذا فرض ان

$$س ه^ص - ص + ١ = ٠$$

فنجد $\frac{ءم}{ءس} = ه^ص$ و $\frac{ءم}{ءص} = س ه^ص - ١$

ويحدث

$$ءص = \frac{ه^ص}{س ه^ص - ١} ءس$$

أو

$$ءص = \frac{ه^ص}{ص - ٢} ءس$$

ولنفرض الآن المتعلقتين ص و ط بالمستقلة س والمعادلتين

$$م(س، ص، ط) = ٠$$

$$مـ(س، ص، ط) = ٠$$

فللحصول على المشتقتين $\frac{ءص}{ءس}$ و $\frac{ءط}{ءس}$ نعمل التفاضل فنجد

$$\frac{ءم}{ءس} ءس + \frac{ءم}{ءص} ءص + \frac{ءم}{ءط} ءط = ٠$$

$$\frac{ءمـ}{ءس} ءس + \frac{ءمـ}{ءص} ءص + \frac{ءمـ}{ءط} ءط = ٠$$

ومن هنا يحدث

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{\frac{ءم}{ءس} \frac{ءمـ}{ءط} - \frac{ءم}{ءط} \cdot \frac{ءمـ}{ءس}}{\frac{ءم}{ءط} \cdot \frac{ءمـ}{ءص} - \frac{ءم}{ءص} \cdot \frac{ءمـ}{ءط}}$$

و

$$\frac{دط}{دس} = \frac{\frac{دم}{دص}\cdot\frac{دمـ}{دس} - \frac{دم}{دس}\cdot\frac{دمـ}{دص}}{\frac{دم}{دط}\cdot\frac{دمـ}{دص} - \frac{دم}{دص}\cdot\frac{دمـ}{دط}}$$

لیکن مثلا

$$س^2 + ص^2 + ط^2 - ١ = ٠$$

$$سص + سط + صط - ١ = ٠$$

فنجد بغاية السهولة

$$\frac{دص}{دس} = \frac{(س - ط)\,(س + ص + ط)}{(ص - ط)\,(ص + ط - س)}$$

$$\frac{دط}{دس} = \frac{(ص - س)\,(س + ص + ط)}{(ص - ط)\,(ص + ط - س)}$$

(فى المشتقات والتفاضلات ذات المراتب المختلفة للمتعلقات بمتغيرة واحدة)

٢٥ • حيث ان مشتقة المتعلقة $ص = م\,(س)$ وهى $م'\,(س)$ متعلقة أيضا بالمتغيرة $س$ (المطلب ٨) فيمكن ايجاد مشتقتها كما تقدم ويرمز لهذه المشتقة ثانية بالرمز $م''\,(س)$ ويرمز لمشتقتها بالرمز $م'''\,(س)$ وللمشتقة الثالثة بالرمز $م''''\,(س)$ وهلم جرا • ويقابل لهذه المشتقات المتتابعة التفاضلات المتتابعة فنقول اذا كان $دص = م'\,(س)\,دس$ وفرضنا ان $دس$ ثابت اختياري يحدث باخذ تفاضل كل من الطرفين

$$د.(دص) = د.[م'\,(س)]\,دس = م''\,(س)\,دس^2$$

واذا رمزنا بالرمز $د^2ص$ للتفاضل الثانى $د.(دص)$ يكون

$$د^2ص = م''\,(س)\,دس^2$$

وبهذه الطريقة نجد التفاضل الثالث أعنى

$$د^3ص = م'''\,(س)\,دس^3$$

وعلى العموم نجد التفاضل ذا المرتبة النونية وهو

$$د^{ى}ص = م^{ى}(س)\ د س^{ى}$$

ومن هذه المعادلات ينتج

$$\frac{دص}{دس} = م'(س) \quad و \quad \frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = م''(س) \quad و \quad \frac{د^{٣}ص}{دس^{٣}} = م'''(س)$$

$$\cdots\ و \quad \frac{د^{ى}ص}{دس^{ى}} = م^{ى}(س)\ دس^{ى}$$

وهى المشتقات المتتابعة

(تطبيقات)

١٠ ليكن مثلا $م(س) = س^{ح}$ فنجد

$$م'(س) = ح\ س^{ح-١}$$

$$م''(س) = ح\ (ح-١)\ س^{ح-٢}$$

$$م'''(س) = ح(ح-١)(ح-٢)\ س^{ح-٣}$$

....

$$م^{ى}(س) = ح(ح-١)(ح-٢)\cdots(ح-ى+١)\ س^{ح-ى}$$

وهى المشتقة النونية

واذا فرضنا ان $ى = ح$ يصير $م^{ح}(س) = ح\,!$ أعنى ان مقدار هذه المشتقة كمية ثابتة فتكون المشتقات الآتية معدومة

٢٠ لنفرض $م(س) = ن^{س}$ فيكون

$$م'(س) = ن^{س}\ لع\ ن$$

$$م''(س) = ن^{س}\ لع^{٢}\ ن$$

$$م'''(س) = ن^{س}\ لع^{٣}\ ن$$

....

$م^{(ن)}(س) = ن^{س}\, لو^{ن}\, ن$ وهى المشتقة النونية

واذا جعلنا ن = ه يحدث

$$م'(س) = ه^{س}$$

$$م''(س) = ه^{س}$$

$$م'''(س) = ه^{س}$$

....

$$م^{(ن)}(س) = ه^{س}$$

ومن هنا ينتج ان

$$م'(س) = م'(س) = م''(س) - \cdots\cdots = م^{(ن)}(س)$$

أعنى ان المتعلقة $ه^{س}$ ومشتقاتها كلها متساوية

٣٠ ليكن م (س) = لو س فيحدث

$$م'(س) = س^{-1}\, لو\, ه$$

$$م''(س) = -\, س^{-2}\, لو\, ه$$

$$م'''(س) = ٢!\, س^{-3}\, لو\, ه$$

$$م''''(س) = -٣!\, س^{-4}\, لو\, ه$$

$$م'''''(س) = ٤!\, س^{-5}\, لو\, ه$$

....

$$م^{(ن)}(س) = \pm\, (ن - ١)!\, س^{-ن}\, لو\, ه$$

فتأخذ العلامة + اذا كان ن عددا فردا والعلامة − اذا كان زوجا

واذا اعتبرنا اللوغاريتم نبريانيا نجد

م (س) = لو س

م' (س) = $\frac{1}{س}$

م'' (س) = $-\frac{1}{س^{2}}$

م''' (س) = $\frac{2!}{س^{3}}$

م'''' (س) = $-\frac{3!}{س^{4}}$

. . . .

م^ن (س) = $\pm \frac{(ن-1)!}{س^{ن}}$

وتؤخذ العلامة كما سبق

٤٠ اذا فرضنا ان م (س) = حا س يوجد

م' (س) = جتا س = حا (س + $\frac{ط}{2}$)

م'' (س) = − حا س = حا (س + ط)

م''' (س) = − جتا س = حا (س + $\frac{3}{2}$ ط)

م'''' (س) = حا س = حا (س + ٢ ط)

. . . .

م^ن (س) = حا (س + $\frac{ن}{2}$ ط)

٥٠ واذا كان م (س) = جتا س يحدث

م' (س) = − حا س = جتا (س + $\frac{ط}{2}$)

م'' (س) = − جتا س = جتا (س + ط)

م‴ (س) = حا س = جتا (س + ٣/٢ ط)

. . . .

م^(ن) (س) = جتا (س + ن/٢ ط)

٦ . لتكن المتعلقة الآتية

م (س) = هـ^(س جتا و) جتا (س حا و)

فنجد

م′ (س) = هـ^(س جتا و) [جتا (س حا و) جتا و − حا (س جتا و) حا و]

= هـ^(س جتا و) جتا (س حا و + و)

م″ (س) = هـ^(س جتا و) جتا (س حا و + ٢ و)

م‴ (س) = هـ^(س جتا و) جتا (س حا و + ٣ و)

م⁗ (س) = هـ^(س جتا و) جتا (س حا و + ٤ و)

. . . .

م^(ن) (س) = هـ^(س جتا و) جتا (س حا و + ن و)

(فى قانون لايبنتس)

٢٦ . فائدة هذا القانون سهولة استخراج التفاضلات المتتابعة لمتعلقة هى

حاصل ضرب متعلقتين

لنكن ص و ط متعلقتين بالمستقلة س فيكون

$$\text{ى}\cdot(\text{صط}) = \text{ص ى ط} + \text{ط ى ص}$$

$$\text{ى}^{٢}\cdot(\text{صط}) = \text{ص ى}^{٢}\text{ط} + ٢\,\text{ى ص ى ط} + \text{ط ى}^{٢}\text{ص}$$

$$\text{ى}^{٣}\cdot(\text{صط}) = \text{ص ى}^{٣}\text{ط} + ٣\,\text{ى ص ى}^{٢}\text{ط} + ٣\,\text{ى}^{٢}\text{ص ى ط} + \text{ط ى}^{٣}\text{ص}$$

وينتج قياسا على هذا

$$(١)\quad \text{ى}^{\text{ن}}\cdot(\text{صط}) = \text{ص ى}^{\text{ن}}\text{ط} + \text{ن ى ص ى}^{\text{ن}-١}\text{ط} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-١)}{٢!}\text{ى}^{٢}\text{ص ى}^{\text{ن}-٢}\text{ط}$$

$$+ \cdots +$$

$$\frac{\text{ن}(\text{ن}-١)(\text{ن}-٢)\cdots(\text{ن}-\text{ح}+١)}{\text{ح}!}\text{ى}^{\text{ح}}\text{ص ى}^{\text{ن}-\text{ح}}\text{ط}$$

$$+ \cdots + \text{ط ى}^{\text{ن}}\text{ص}$$

وهذا هو القانون المذكور ومنه

$$\frac{\text{ى}^{\text{ن}}\cdot(\text{صط})}{\text{ى س}^{\text{ن}}} = \text{ص}\frac{\text{ى}^{\text{ن}}\text{ط}}{\text{ى س}^{\text{ن}}} + \text{ن}\,\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}}\cdot\frac{\text{ى}^{\text{ن}-١}\text{ط}}{\text{ى س}^{\text{ن}-١}} + \cdots\cdots$$

$$\cdots + \text{ط}\frac{\text{ى}^{\text{ن}}\text{ص}}{\text{ى س}^{\text{ن}}}$$

وهي مشتقة حاصل ضرب (صط) النونية

ولبيان ان القانون (١) يطرد في جميع الحالات التي يفرض فيها غير المقدار ن يكفي أن نفرض المقدار ن + ١ ونبحث عما يؤول اليه هذا القانون . فبأخذ تفاضل كل من الطرفين نجد

$$\text{ى}^{\text{ن}+١}\cdot(\text{صط}) = (\text{ى ص ى}^{\text{ن}}\text{ط} + \text{ص ى}^{\text{ن}+١}\text{ط}) + \text{ن}(\text{ى}^{٢}\text{ص ى}^{\text{ن}-١}\text{ط} + \text{ى ص ى}^{\text{ن}}\text{ط})$$

$$+ \frac{\text{ن}(\text{ن}-١)}{٢!}(\text{ى}^{٣}\text{ص ى}^{\text{ن}-٢}\text{ط} + \text{ى}^{٢}\text{ص ى}^{\text{ن}-١}\text{ط}) + \cdots\cdots$$

$$+\frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)\cdots(\text{ن}-\text{ر}+1)}{\text{ر}!}\left(\text{د}^{\text{ر}+1}\text{ص}\ \text{د}^{\text{ن}-\text{ر}}\text{ط}\right.$$

$$\left.+\ \text{د}^{\text{ر}}\text{ص}\ \text{د}^{\text{ن}-\text{ر}+1}\text{ط}\right)+\left(\text{ط}\ \text{د}^{\text{ن}+1}\text{ص}+\text{د}\text{ط}\ \text{د}^{\text{ن}}\text{ص}\right)$$

وبضم الحدود المتشابهة فى الطرف الثانى نجد

$$\therefore\ \text{د}^{\text{ن}+1}(\text{ص}\text{ط})=\text{ص}\,\text{د}^{\text{ن}+1}\text{ط}+(\text{ن}+1)\,\text{د}\text{ص}\,\text{د}^{\text{ن}}\text{ط}+\frac{(\text{ن}+1)\text{ن}}{2!}\text{د}^{2}\text{ص}\,\text{د}^{\text{ن}-1}\text{ط}$$

$$+\cdots+\frac{(\text{ن}+1)\,\text{ن}\,(\text{ن}-1)\cdots(\text{ن}-\text{ر})}{\text{ر}!}\text{د}^{\text{ر}}\text{ص}$$

$$+\ \text{د}^{\text{ن}+1-\text{ر}}\text{ط}+\cdots+\text{ط}\,\text{د}^{\text{ن}+1}\text{ص}$$

وهو القانون (١) السابق اذا وضع فيه $\text{ن}+1$ عوضا عن ن

(ملحوظ) اذا قارنا قانون لايبنتس بقانون نيوتون نجد انه يمكن وضع الاول على الصورة

$$\text{د}^{\text{ن}}\cdot(\text{ص}\text{ط})=(\text{د}\text{ص}+\text{د}\text{ط})^{\text{ن}}$$

بشرط ان نجعل فى الطرف الثانى اس $\text{د}\text{ص}$ و $\text{د}\text{ط}$ علامات تفاضلية ونضرب الحد الاول فى ط والاخير فى ص .

ولتطبيق هذا القانون نفرض ان $\text{م}=\text{س}^{\text{م}}\,\text{ه}^{\text{ح}\text{س}}$ فنأخذ

$$\text{ص}=\text{س}^{\text{م}}\ ,\ \text{ط}=\text{ه}^{\text{ح}\text{س}}$$

وبناء على ما تقدم يكون

$$\text{د}\text{ص}=\text{م}\,\text{س}^{\text{م}-1}\,\text{د}\text{س}$$

$$\text{د}^{2}\text{ص}=\text{م}(\text{م}-1)\,\text{س}^{\text{م}-2}\,\text{د}\text{س}^{2}$$

....

$$\text{د}^{\text{ن}}\text{ص}=\text{م}(\text{م}-1)(\text{م}-2)\cdots(\text{م}-\text{ن}+1)\,\text{س}^{\text{م}-\text{ن}}\,\text{د}\text{س}^{\text{ن}}$$

ويكون

$$\text{ءط} = \text{ح}\ \text{هـ}^{\text{حس}}\ \text{ءس}$$

$$\text{ء}^{٢}\text{ط} = \text{ح}^{٢}\ \text{هـ}^{\text{حس}}\ \text{ءس}^{٢}$$

$$\text{ء}^{٣}\text{ط} = \text{ح}^{٣}\ \text{هـ}^{\text{حس}}\ \text{ءس}^{٣}$$

....

$$\text{ء}^{\text{ن}}\text{ط} = \text{ح}^{\text{ن}}\ \text{هـ}^{\text{حس}}\ \text{ءس}^{\text{ن}}$$

وبموجب قانون لايبنتس يحدث

$$\text{ء}^{\text{ن}}\text{م} = \text{هـ}^{\text{حس}} \Big(\text{ح}^{\text{ن}}\text{س}^{\text{ب}} + \text{ن}\,\text{ب}\,\text{ح}^{\text{ن}-١}\text{س}^{\text{ب}-١} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-١)}{٢!}\text{ب}$$

$$+ (\text{ب}-١)\,\text{ح}^{\text{ن}-٢}\text{س}^{\text{ب}-٢} + \cdots\cdots \Big)\ \text{ءس}^{\text{ن}}$$

وهو المطلوب

٢٧ · في بعض الاحيان يلزم معرفة المشتقات المتوالية لدالة بمستقلة ما لمقدار معين ولاسيما المقدار صفر وهاك مثلا لذلك

ليكن $\text{ص} = \text{قوجا}\ \text{س}$ فيكون

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{\sqrt{١ - \text{س}^{٢}}}$$

ومن هنا

$$\sqrt{١ - \text{س}^{٢}}\ \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} + \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \cdot \frac{-\text{س}}{\sqrt{١ - \text{س}^{٢}}} = ٠$$

وحينئذ يكون $(١ - \text{س}^{٢})\ \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} - \text{س}\ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$

فاذا اخذنا المشتقة التي رتبتها $\text{ن} - ١$ للكميتين $(١ - \text{س}^{٢})\ \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$

و $\text{س}\ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ بموجب قانون لايبنتس نجد

$$(١ - \text{س}^{٢})\ \frac{\text{ء}^{\text{ن}+١}\text{ص}}{\text{ءس}^{\text{ن}+١}} - ٢(\text{ن}-١)\ \text{س}\ \frac{\text{ء}^{\text{ن}}\text{ص}}{\text{ءس}^{\text{ن}}} - (\text{ن}-١)(\text{ن}-٢)$$

$$+ \frac{\text{ء}^{\text{ن}-١}\text{ص}}{\text{ءس}^{\text{ن}-١}} - \text{س}\ \frac{\text{ء}^{\text{ن}}\text{ص}}{\text{ءس}^{\text{ن}}} - (\text{ن}-١)\ \frac{\text{ء}^{\text{ن}-١}\text{ص}}{\text{ءس}^{\text{ن}-١}} = ٠$$

وبفرض س = ٠ يحدث

$$\left(\frac{د^{ن+١}ص}{دس^{ن+١}}\right)_{س=٠} + (ن-١)^٢\left(\frac{د^{ن-١}ص}{دس^{ن-١}}\right)_{س=٠} = ٠ \quad (١)$$

فاذا لاحظنا ان $\left(\frac{دص}{دس}\right)_{س=٠} = ١$

وفرضنا فى المعادلة (١) على التوالى ان ن = ١ و ٢ و ٣ و ٤ … الخ لوجدنا ان

$$\left(\frac{د^{ن+١}ص}{دس^{ن+١}}\right)_{س=٠} = ١ \times ٣^٢ \times ٥^٢ \times ٧^٢ \times ٩^٢ \ldots\ldots\ldots (ن-١)^٢$$ اذا كانت ن زوجية

وان $\left(\frac{د^{ن+١}ص}{دس^{ن+١}}\right)_{س=٠} = ٠$ اذا كانت ن فردية

(تمرينات)

(١) لعمل تفاضل المتعلقات المضمرة

١. ١ + س ص = لو $(هـ^{ص س} + هـ^{-س ص})$ المطلوب د ص

الجواب $د ص = - \frac{ص}{س} د س$

٢. ص جا ن س − حـ $هـ^{ن س + ص}$ = ٠ المطلوب د ص الجواب

$د ص = \frac{ن ص}{١ - ص}$ (١ − ظتا ن س) د س

٣. $\left.\begin{matrix} س^٣ + ص^٣ + ط^٣ - ٣ س ص ط = ٠ \\ س + ص + ط = جـ \end{matrix}\right\}$ المطلوب $\frac{دص}{دس}$ و $\frac{دط}{دس}$

الجواب $\frac{دص}{دس} = \frac{ط-س}{ص-ط}$ و $\frac{دط}{دس} = \frac{س-ص}{ص-ط}$

(ب) لعمل التفاضلات ذات المراتب المختلفة

١. ص = $(حـ + ء س)^{ن}$ المطلوب $د^{ن}ص$ الجواب $د^{ن}ص = ن$.

$(ن-١) \ldots (ن-ن+١)$ ء^{ن} (حـ + ء س)$^{ن-ن}$ د س^{ن}

٢٠ ص = جتا^٢ س المطلوب $ء^{ن} ص$ الجواب $ء^{ن} ص = ٢^{ن-١} \times$ جتا $(٢ س + ن \frac{ط}{٢}) \, ء س^{ن}$

٣٠ $ص = \frac{١+س}{١-س}$ المطلوب $ء^{ن} ص$ الجواب $ء^{ن} ص = ٢ \times \frac{ن(ن-١) \cdots ٣ \times ٢ \times ١}{(١-س)^{ن+١}} \, ء س^{ن}$

٤٠ ص = قوطا س المطلوب $\frac{ء^{ن} ص}{ء س^{ن}}$ فضع اولا $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{١}{١+س^{٢}}$ ثم ضع

س = طنا ه فيكون $\frac{ء ه}{ء س} = -$ حا^٢ ه و $\frac{ء ص}{ء س} = $ حا^٢ ه

ومنهما $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} = -$ حا^٢ ه حا ٢ ه و $\frac{ء^{٣} ص}{ء س^{٣}} = ٢!$ حا^٣ ه حا ٣ ه

... واخيرا $\frac{ء^{ن} ص}{ء س^{ن}} = (-١)^{ن-١} (ن-١)!$ حا^ن ه حا ن ه $= (-١)^{ن-١} \times \frac{(ن-١)!}{(١+س^{٢})^{\frac{ن}{٢}}}$ حا (ن قوطنا س) وهو الجواب

(ج) لتطبيق قانون لايبنتس

١٠ $ص = س^{ن} (١ - س)^{ن}$ المطلوب $ء^{ن} ص$

الجواب $ء^{ن} ص = ن! \, (١ - س)^{ن} \Big\{ ١ - \left(\frac{ن}{١}\right)^{٢} \frac{س}{١ - س}$

$$+ \left(\frac{ن(ن-١)}{٢!}\right)^{٢} \left(\frac{س}{١-س}\right)^{٢}$$

$$- \left(\frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{٣!}\right)^{٢} \left(\frac{س}{١-س}\right)^{٣} + \cdots \Big\} \, ء س^{ن}$$

٢٠ ص = قوطا س المطلوب المشتقة ذات المرتبة النونية بفرض س = ٠

الجواب $\left(\frac{ء^{ن+١} ص}{ء س^{ن+١}}\right)_{س=٠} = (-١)^{\frac{ن}{٢}} \, ن!$ اذا كانت ن زوجية

و $\left(\frac{ء^{ن+١}ص}{ءس^{ن+١}}\right)_{س=٠} = ٠$ اذا كانت ن فردية

(فى المشتقات المتتابعة للمتعلقات المضمرة)

٢٨ لايجاد المشتقات المتتابعة للمتعلقة ص المبينة بالمعادلة

$$م(س،ص) = ٠ \qquad (١)$$

تأخذ المشتقة الاولى فيحدث

$$\frac{ءم}{ءس} + \frac{ءم}{ءص}\cdot\frac{ءص}{ءس} = ٠$$

او

$$\frac{ءم}{ءس} + \frac{ءم}{ءص}\,صَ = ٠ \qquad (٢)$$

ومنه يستخرج مقدار صَ لكنه يشتمل على س و ص فاذا أريد ان لا يحتوى الا على س فقط تمحى ص من المعادلتين (١) و (٢) ويحل المعادلة الناتجة بالنسبة الى صَ فينتج المطلوب

وللتحصيل على المشتقة الثانية صً تكتب المعادلة (٢) على هذه الصورة

$$م_{١}(س،ص،صَ) = ٠$$

فبأخذ المشتقة باعتبار ص و صَ متعلقتين بالمتغيرة س يحدث

$$\frac{ءم_{١}}{ءس} + \frac{ءم_{١}}{ءص}\cdot\frac{ءص}{ءس} + \frac{ءم_{١}}{ءصَ}\cdot\frac{ءصَ}{ءس} = ٠$$

او

$$\frac{ءم_{١}}{ءس} + \frac{ءم_{١}}{ءص}\,صَ + \frac{ءم_{١}}{ءصَ}\,صً = ٠ \qquad (٣)$$

ومن هذه المعادلة يستخرج مقدار صً ولاجل انه لا يحتوى على غير س تمحى ص و صَ من المعادلات (١) و (٢) و (٣) وكذا يستمر العمل

ليكن مثلا

$$س\,ص - ح = ٠$$

فيكون

$$ص + س\,صَ = ٠$$

$$٢صَ + س\,صً = ٠$$

$$٣\,\text{ص}' + \text{س}\,\text{ص}'' = ٠$$

ومنها

$$\text{ص}' = -\frac{\text{ص}}{\text{س}}$$

$$\text{ص}'' = -\,٢\,\frac{\text{ص}'}{\text{س}} = ٢\,\frac{\text{ص}}{\text{س}^{٢}}$$

$$\text{ص}''' = -\,٣\,\frac{\text{ص}''}{\text{س}} = ٢\times٣\,\frac{\text{ص}}{\text{س}^{٣}}$$

وبوضع $\frac{\text{ح}^{٢}}{\text{س}}$ عوضا عن ص يحدث

$$\text{ص}' = -\frac{\text{ح}^{٢}}{\text{س}^{٢}}$$

$$\text{ص}'' = ٢\,\frac{\text{ح}^{٢}}{\text{س}^{٣}}$$

$$\text{ص}''' = -\,٢\times٣\,\frac{\text{ح}^{٢}}{\text{س}^{٤}}$$

وهكذا

(في تبديل المتغيرة المستقلة)

٢٩ — قد فرضنا في المطلب ٢٥ ان تفاضل المتغيرة س وهو ءس كمية ثابتة فاذا كانت س متعلقة بالمتغيرة ط بحيث تكون س = م (ط) (١) وأريد ايجاد مشتقات ص المتتابعة بالنسبة الى هذه المستقلة الجديدة نضع م (ط) عوضا عن س في المعادلة ص = م (س) ثم نجري العمل مثل ما تقدم ويمكن ايجاد المطلوب بغير ما ذكر وهو ان يؤخذ تفاضلات المعادلة الاخيرة باعتبار ان ص متعلقة بمتعلقة فيحدث

$$(٢)\quad \begin{cases} \text{ء}\text{ص} = \text{م}'(\text{س})\,\text{ء}\text{س} \\ \text{ء}^{٢}\text{ص} = \text{م}''(\text{س})\,\text{ء}\text{س}^{٢} + \text{م}'(\text{س})\,\text{ء}^{٢}\text{س} \\ \text{ء}^{٣}\text{ص} = \text{م}'''(\text{س})\,\text{ء}\text{س}^{٣} + ٣\,\text{م}''(\text{س})\,\text{ء}\text{س}\,\text{ء}^{٢}\text{س} + \text{م}'(\text{س})\,\text{ء}^{٣}\text{س} \end{cases}$$

وبأخذ تفاضلات المعادلة (١) نجد

$$\text{ءس} = \text{مـ}'(\text{ط})\ \text{ءط}$$

$$\text{ء}^{2}\text{س} = \text{مـ}''(\text{ط})\ \text{ءط}^{2}$$

$$\text{ء}^{3}\text{س} = \text{مـ}'''(\text{ط})\ \text{ءط}^{3}$$

فاذا وضعنا بدلا عن ءس و ء^{2}س ... الخ فى المعادلات (٢) ماساواها فى المعادلات الاخيرة ثم قسمنا طرفى كل معادلة على ءط و ء^{2}ط ... الخ نجد

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءط}} = \text{م}'(\text{س})\ \text{مـ}'(\text{ط})$$

$$\frac{\text{ء}^{2}\text{ص}}{\text{ءس}^{2}} = \text{م}''(\text{س})\ \text{مـ}'(\text{ط})^{2} + \text{م}'(\text{س})\ \text{مـ}''(\text{ط})$$

$$\frac{\text{ء}^{3}\text{ص}}{\text{ءس}^{3}} = \text{م}'''(\text{س})\ \text{مـ}'(\text{ط})^{3} + ٣\ \text{م}''(\text{س})\ \text{مـ}'(\text{ط})\ \text{مـ}''(\text{ط}) + \text{م}'(\text{س})\ \text{مـ}'''(\text{ط})$$

و بوضع آخر نجد

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءط}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \cdot \frac{\text{ءس}}{\text{ءط}}$$

$$\frac{\text{ء}^{2}\text{ص}}{\text{ءط}^{2}} = \frac{\text{ء}^{2}\text{ص}}{\text{ءس}^{2}} \left(\frac{\text{ءس}}{\text{ءط}}\right)^{2} + \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \cdot \frac{\text{ء}^{2}\text{س}}{\text{ءط}^{2}} \qquad (٣)$$

$$\frac{\text{ء}^{3}\text{ص}}{\text{ءط}^{3}} = \frac{\text{ء}^{3}\text{ص}}{\text{ءس}^{3}} \left(\frac{\text{ءس}}{\text{ءط}}\right)^{3} + ٣\ \frac{\text{ء}^{2}\text{ص}}{\text{ءس}^{2}} \cdot \frac{\text{ء}^{2}\text{س}}{\text{ءط}^{2}} \cdot \frac{\text{ءس}}{\text{ءط}} + \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \cdot \frac{\text{ء}^{3}\text{س}}{\text{ءط}^{3}}$$

وهو المطلوب

٣٠ . لتكن ء = م (س و ص و $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ و $\frac{\text{ء}^{2}\text{ص}}{\text{ءس}^{2}}$ و ...) (١)
معادلة تحتوى على س و ص ومشتقات ص المتتابعة بالنسبة الى س فاذا اريد تبديل س فى هذه المعادلة بمتغيرة جديدة ط مرتبطة بالمتغيرة س بمعادلة مثل س = مـ(ط) والمشتقات $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ و $\frac{\text{ء}^{2}\text{ص}}{\text{ءس}^{2}}$ $\frac{\text{ء}^{3}\text{ص}}{\text{ءس}^{3}}$ ... بمشتقات ص بالنسبة الى ط يكفى ان نحل المعادلات (٣) بالنسبة الى $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ و $\frac{\text{ء}^{2}\text{ص}}{\text{ءس}^{2}}$ و $\frac{\text{ء}^{3}\text{س}}{\text{ءط}^{3}}$ و ..... ثم نضع مقاديرها فى المعادلة (١).
ويمكن ايجاد هذه المقادير بواسطة القانون

$$\frac{دص}{دط} = \frac{دص}{دس} \cdot \frac{دس}{دط}$$

لانه ينتج منه

$$\frac{دص}{دس} = \frac{\left(\frac{دص}{دط}\right)}{\left(\frac{دس}{دط}\right)} \qquad (٤)$$

فباخذ المشتقة بالنسبة الى ط يكون

$$\frac{د^2ص}{دس^2}\,\frac{دس}{دط} = \frac{\frac{د^2ص}{دط^2}\cdot\frac{دس}{دط} - \frac{دس}{دط}\cdot\frac{د^2س}{دط^2}\cdot\frac{دص}{دط}}{\left(\frac{دس}{دط}\right)^2}$$

ومنها

$$\frac{د^2ص}{دس^2} = \frac{\frac{د^2ص}{دط^2}\cdot\frac{دس}{دط} - \frac{د^2س}{دط^2}\cdot\frac{دص}{دط}}{\left(\frac{دس}{دط}\right)^3} \qquad (٥)$$

وباخذ مشتقة هذه المعادلة نجد

$$\frac{د^3ص}{دس^3} = \frac{\frac{دس}{دط}\left(\frac{دس}{دط}\cdot\frac{د^3ص}{دط^3} - \frac{دص}{دط}\cdot\frac{د^3س}{دط^3}\right) - 3\,\frac{د^2س}{دط^2}\left(\frac{دس}{دط}\cdot\frac{د^2ص}{دط^2} - \frac{دص}{دط}\cdot\frac{د^2س}{دط^2}\right)}{\left(\frac{دس}{دط}\right)^5} \qquad (٦)$$

وهلم جرا .

لتكن مثلا المعادلة

$$(1 - س^2)\,\frac{د^2ص}{دس^2} - س\,\frac{دص}{دس} + ح^2\,ص = 0$$

فاذا اريد تحويلها الى معادلة اخرى لا تحتوى الا على ص ومتغيرة جديدة ط بفرض ان س = جتا ط نقول

$$\frac{دس}{دط} = -\,حا\,ط \quad و \quad \frac{د^2س}{دط^2} = -\,جتا\,ط$$

فبوضع هذين المقدارين فى القانونين (٤) و (٥) نجد

$$\frac{دص}{دس} = -\,\frac{1}{حا\,ط}\cdot\frac{دص}{دط}$$

$$\frac{د^2ص}{دس^2} = \frac{1}{حا^2\,ط}\cdot\frac{د^2ص}{دط^2} - \frac{جتا\,ط}{حا^3\,ط}\cdot\frac{دص}{دط}$$

فبواسطة هاتين المعادلتين والمعادلة $\text{س} = \text{جتا}\ \text{ط}$ تؤول المعادلة المفروضة الى

$$\frac{د^2 ص}{د ط^2} + ح^2 ص = 0$$ وهو المطلوب

وكذلك اذا كانت

$$\frac{د^2 ص}{د س^2} + \frac{1}{س}\frac{د ص}{د س} + ص = 0$$

و $س^2 = 4\,ط$ نجد

$$ط\,\frac{د^2 ص}{د ط^2} + \frac{د ص}{د ط} + ص = 0$$

٤٣ . واذا اريد اخذ ص متغيرة مستقلة بجعل $ص = ط$ فتؤول القوانين (٤) و (٥) و (٦) الى

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{1}{\frac{د س}{د ص}} \qquad (٤')$$

$$\frac{د^2 ص}{د س^2} = \frac{-\frac{د^2 س}{د ص^2}}{\left(\frac{د س}{د ص}\right)^3} \qquad (٥')$$

$$\frac{د^3 ص}{د س^3} = \frac{-\frac{د س}{د ص}\cdot\frac{د^3 س}{د ص^3} + 3\left(\frac{د^2 س}{د ص^2}\right)^2}{\left(\frac{د س}{د ص}\right)^5} \qquad (٦')$$

لتكن مثلا المعادلة

$$\left[1 + \left(\frac{د ص}{د س}\right)^2\right]\frac{د ص}{د س} + (ص - ح)\frac{د^2 ص}{د س^2} = 0$$

ولنبحث عما تؤول اليه اذا جعلت ص المتغيرة المستقلة ولذلك نستعمل القانونين (٤') و (٥') فنجد

$$1 + \left(\frac{د س}{د ص}\right)^2 - (ص - ح)\frac{د^2 س}{د ص^2} = 0$$

(تمرينات)

١ . المفروض $س = هـ^{ط}$ والمطلوب تبديل س بالمتغيرة ط في المعادلة

$$س^2 \frac{د^2 ص}{د س^2} + ه\, س \frac{د ص}{د س} + ب\, ص = 0$$

الجواب $\frac{د^2 ص}{د ط^2} + (ه - 1)\frac{د ص}{د ط} + ب ص = 0$

٢. المفروض ه + س = $ه^{ط}$ والمرام تبديل س بالمتغيرة ط فى

$$(ه + س)^3 \frac{د^3 ص}{د س^3} + 3 (ه + س)^2 \frac{د^2 ص}{د س^2} + (ه + س) \times \frac{د ص}{د س} + ب ص = 0$$

الجواب $\frac{د^3 ص}{د ط^3} + ب ص = 0$

٣. اجعل ص المتغيرة المستقلة فى

$$\frac{د^2 ص}{د س^2} - س \left(\frac{د ص}{د س}\right)^3 + ه^{ص} \left(\frac{د ص}{د س}\right)^3 = 0$$

الجواب $\frac{د^2 س}{د ص^2} + س - ه^{ص} = 0$

٤. المفروض ط = لو $[\, س + (1 + س^2)^{\frac{1}{2}} \,]$ والمطلوب تبديل س الى ط فى

$$\frac{د ص}{د س} + \frac{ص}{(1 + س^2)^{\frac{1}{2}}} = ه$$

الجواب $\frac{د ص}{د ط} + ص = \frac{ح}{2} (ه^{ط} + ه^{-ط})$

الباب السادس

(تطبيقات جبرية)

—

نسبة زيادتى متعلقتين
بمتغيرة واحدة

٣٢. لتكن المتعلقة ص = م (س) متغيرة تصاعدا او تنازلا بين النهايتين س و س + ف س ومن المعلوم ان

$$ف ص = م (س + ف س) - م (س) \qquad (1)$$

ثم لتكن ع (ص) متعلقة بالمتغيرة ص ولنفرض ان مشتقتها $عَ$ (ص) تكون محدودة مستمرة بين النهايتين ص و ص + ف ص فبموجب ما قلناه فى المطلب ٩ يكون

مَ (ص + ف ص) — م (ص) / ف ص = مَ (ص + ة ف ص) (٢)

بفرض ة عدداً محصوراً بين الصفر والواحد

فاذا وضعنا م (س) عوضاً عن ص في م (ص) ورمزنا بالرمز ح (س) للمتعلقة س الناتجة من هذا التبديل يحدث

م (ص) = ح (س) (٣)

وحينئذ يكون

م (ص + ف ص) = ح (س + ف س)

فاذا أخذنا مشتقي طرفي المعادلة (٣) باعتبار أن م (ص) متعلقة بمتعلقة نجد

مَ (ص) مَ (س) = حَ (س)

ومنه مَ (ص) = حَ (س) / مَ (س)

وحيث فرضنا أن ص تتغير تصاعدياً تزايدياً بين النهايتين س و س + ف س فاذا زادت هذه المتعلقة بالزيادة ة ف ص المحصورة بين ف ص والصفر تزيد أيضاً المتعلقة س بزيادة مثل ة ف س محصورة كذلك بين ف س والصفر (بفرض ة < ١) ويحدث

مَ (ص + ة ف ص) = حَ (س + ة ف س) / مَ (س + ة ف س) (٤)

وبمحو ص من المعادلة (٢) بواسطة (١) و (٣) و (٤) نجد

ح (س + ف س) — ح (س) / م (س + ف س) — م (س) = حَ (س + ة ف س) / مَ (س + ة ف س) (٥)

وبالملاحظة يلزم لأجل أن تكون مَ (ص) مستمرة بين النهايتين ص و ص + ف ص أن تكون المشتقتان حَ (س) ومَ (س) مستمرتين وزيادة على ذلك

انه

انه لا تنعدم ثانية بين س و س + ف س وهذا الفرض ممكن دائما اذا اخذ ف س صغيرا صغرا كافيا

٣٣ • اذا فرضت الكمية المعينة ح مقدار المتغيرة س وفرض ان

$$\text{ق}(\text{ح}) = ٠ \quad \text{و} \quad \text{م}(\text{ح}) = ٠$$

وجعل لاجل الاختصار ف س = ر و ة ف س = رَ (فاذا كون ر > رَ) لآلت المعادلة (٥) الى

$$\frac{\text{ق}(\text{ح}+\text{ر})}{\text{م}(\text{ح}+\text{ر})} = \frac{\text{ق}'(\text{ح}+\text{ر}')}{\text{م}'(\text{ح}+\text{ر}')}$$

فاذا فرض ان قَ (ح) = ٠ و مَ (ح) = ٠ مع الفرض بان قً (س) و مً (س) كميتان محدودتان مستمرتان لا تنعدم ثانيتهما بين س و س + ف س ينتج كما تقدم

$$\frac{\text{ق}'(\text{ح}+\text{ر}')}{\text{م}'(\text{ح}+\text{ر}')} = \frac{\text{ق}''(\text{ح}+\text{ر}'')}{\text{م}''(\text{ح}+\text{ر}'')}$$

بفرض رً < رَ

ومن هذه المعادلة وسابقتها يحدث ان

$$\frac{\text{ق}(\text{ح}+\text{ر})}{\text{م}(\text{ح}+\text{ر})} = \frac{\text{ق}''(\text{ح}+\text{ر}'')}{\text{م}''(\text{ح}+\text{ر}'')}$$

وعلى ماذكر ينتج على وجه عام ان

$$\frac{\text{ق}(\text{ح}+\text{ر})}{\text{م}(\text{ح}+\text{ر})} = \frac{\text{ق}^{(\text{ن})}(\text{ح}+\text{ة}\,\text{ر})}{\text{م}^{(\text{ن})}(\text{ح}+\text{ة}\,\text{ر})} \qquad (٦)$$

بشرط ان جميع مشتقات $\text{ق}'(\text{س})$ و $\text{م}(\text{س})$ المتتابعة ماعدا النونية تنعدم بجعل $\text{س} = \text{ح}$ وانها عدا النونية تكون مستمرة بين س و $\text{س} + \text{ف}\,\text{س}$. فاذا فرضنا مثلا ان $\text{م}(\text{س}) = (\text{س} - \text{ح})^{\text{ن}}$ نرى ان جميع المشتقات ماعدا النونية تنعدم بجعل $\text{س} = \text{ح}$ وأن النونية تكون

$$\text{م}^{\text{ن}}(\text{س}) = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots\cdots \times \text{ن}$$

فتؤل المعادلة (٦) الى

$$\text{ق}'(\text{ح} + \text{ر}) = \frac{\text{ر}^{\text{ن}}}{\text{ن}!}\,\text{ق}^{\text{ن}}(\text{ح} + \text{ة}\,\text{ر}) \qquad (٧)$$

وبفرض $\text{ح} = ٠$ يحدث

$$\text{ق}'(\text{ر}) = \frac{\text{ر}^{\text{ن}}}{\text{ن}!}\,\text{ق}^{\text{ن}}(\text{ة}\,\text{ر}) \qquad (٨)$$

(فى المقدار الحقيقى للمتملئات ذات الصورة $\frac{٠}{٠}$)

٣٤ . المفروض أن الكمية $\frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{م}(\text{س})}$ تأخذ الصورة $\frac{٠}{٠}$ اذا جعلنا فيها $\text{س} = \text{ح}$ والمطلوب ايجاد المقدار الذى تقرب منه هذه الكمية حينما تقرب س من ح أعنى ايجاد المقدار المسمى بالمقدار الحقيقى ولذلك نجعل $\text{س} = \text{ح} + \text{ر}$ فيحدث بموجب القانون (٦)

$$\frac{\text{ق}'(\text{ح} + \text{ر})}{\text{م}(\text{ح} + \text{ر})} = \frac{\text{ق}'(\text{ح} + \text{ر})}{\text{م}'(\text{ح} + \text{ر})}$$

وكلما قربت س من ح صغرت ر وعند النهاية يصير

$$\text{نها}\,\frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{م}(\text{س})} = \text{نها}\,\frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{م}'(\text{س})}$$

فاذا كانت المشتقتان $د'(ح)$ و $م'(ح)$ غير منعدمتين وغير لانهائيتين

كان المقدار الحقيقي هو $\frac{د'(ح)}{م'(ح)}$

اما اذا كانت $د'(ح) = ٠$ و $م'(ح) = ٠$ يحدث

$$نها \frac{د'(س)}{م'(س)} = نها \frac{د''(س)}{م''(س)}$$

وعلى العموم اذا كانت $د^{(ن)}(س)$ و $م^{(ن)}(س)$ هما أول مشتقتين لا تنعدمان في ان واحد بفرض $س = ح$ يكون

$$\frac{د(ح + هـ)}{م(ح + هـ)} = \frac{د^{(ن)}(ح + θ هـ)}{م^{(ن)}(ح + θ هـ)}$$

فيكون حينئذ

$$نها \frac{د(س)}{م(س)} = نها \frac{د^{(ن)}(س)}{م^{(ن)}(س)} = \frac{د^{(ن)}(ح)}{م^{(ن)}(ح)}$$

والمقدار الحقيقي يكون صفرا اذا كانت $د^{(ن)}(ح) = ٠$ ويكون لانهائيا اذا كانت $م^{(ن)}(ح) = ٠$

(أمثلة)

١ – اذا فرض ان

$$\frac{د(س)}{م(س)} = \frac{ح^{٣} - س^{٣}}{ح - س}$$

يؤول الطرف الثاني الى $\frac{٠}{٠}$ بجعل $س = ح$ فاذا اخذنا مشتقتي البسط والمقام يحدث

$$\frac{\bar{ق}(س)}{\bar{م}(س)} = ٣\, س^{٢}$$

ومنه

$$\text{نها}\ \frac{ق(س)}{م(س)} = ٣\, ح^{٢}$$

وهو المطلوب

٢. ليكن $\frac{ق(س)}{م(س)} = \frac{١ - \propto^{س}}{\text{حا}\ س}$

١. افرضنا ان س = ٠ يأخذ الطرف الثانى الصورة ÷ فنجد

$$\text{نها}\ \frac{\bar{ق}(س)}{\bar{م}(س)} = \text{نها}\ \frac{- \propto^{س}}{\text{جتا}\ س} = -١$$

٣. بفرض ان س = $\frac{ط}{١}$ نجد

$$\text{نها}\ \frac{\text{حا}\ \frac{ط}{٤} + \text{حا}\ (\frac{ط}{٤} - س)}{\text{جتا}\ (\frac{ط}{٤} - س) - \text{جتا}\ \frac{ط}{٤}} = \text{ظا}\ \frac{ط}{٤} = ١$$

(تمرينات)

١. $\frac{س^{٣} - ٤\, ح\, س^{٢} + ٥\, ح^{٢}\, س - ٢\, ح^{٣}}{س^{٣} - ٣\, ح^{٢}\, س - ٢\, ح^{٢}} = $ ÷ بفرض

س = ٢ (الجواب) المقدار الحقيقى م = $\frac{١}{٩}$

٢. $\frac{ح^{س} - هـ^{س}}{\text{حا}\ س} = $ ÷ بفرض س = ٠ الجواب م = لو $\frac{ح}{هـ}$

٣. $\frac{س(\propto^{س} + ١) - ٢(\propto^{س} - ١)}{س^{٣}(\propto^{س} - ١)} = $ ÷ بفرض س = ٠

الجواب م = $\frac{١}{٦}$

$\frac{\text{١ ـ جاس}}{\text{جتاس}} = \frac{\text{٠}}{\text{٠}}$ بفرض س = $\frac{\text{ط}}{\text{٢}}$. الجواب م = ٠

(في المقدار الحقيقي للمتعلقات ذات الصورة $\frac{\infty}{\infty}$)

٣٥ . اذا صارت المتعلقتان ق(س) و م(س) لانهائيتين بفرض س = ح يكون الكسران الدالان منهما $\frac{\text{١}}{\text{ق(س)}}$ و $\frac{\text{١}}{\text{م(س)}}$ منعدمين فيمكن اخذ الكمية

$$\frac{\left[\frac{\text{١}}{\text{م(س)}}\right]}{\left[\frac{\text{١}}{\text{ق(س)}}\right]} \text{ عوضا عن } \frac{\text{ق(س)}}{\text{م(س)}}$$

ثم تطبق عليها قاعدة المتعلقات ذات الصورة $\frac{\text{٠}}{\text{٠}}$ فنجد

$$\text{نها}\frac{\text{ق(س)}}{\text{م(س)}} = \text{نها}\frac{\left[\frac{\text{١}}{\text{م(س)}}\right]}{\left[\frac{\text{١}}{\text{ق(س)}}\right]} = \text{نها}\frac{\left[\frac{-\text{م}'\text{(س)}}{\text{م(س)}^{\text{٢}}}\right]}{\left[-\frac{\text{ق}'\text{(س)}}{\text{ق(س)}^{\text{٢}}}\right]}$$

$$= \text{نها}\frac{\text{ق(س)}^{\text{٢}}}{\text{م(س)}^{\text{٢}}} \cdot \frac{\text{م}'\text{(س)}}{\text{ق}'\text{(س)}}$$

فاذا رمزنا للمقدار الحقيقي المطلوب بالحرف هـ المفروض انه غير صفر تؤول المعادلة السابقة الى . $\text{هـ} = \text{هـ}^{\text{٢}} \text{ نها}\frac{\text{م}'\text{(س)}}{\text{ق}'\text{(س)}}$

ومن هنا . $\text{هـ} = \text{نها}\frac{\text{ق}'\text{(س)}}{\text{م}'\text{(س)}}$

اعنى ان المقدار الحقيقي اذا كان غير صفر يساوي نهاية النسبة الكائنة بين مشتقي المتعلقتين المفروضتين كما تقدم واذا كان صفرا يكتب

$$\frac{\text{ق(س)}}{\text{م(س)}} + \text{١} = \frac{\text{ق(س)}+\text{م(س)}}{\text{م(س)}}$$

و بفرض ان س = ح يشاهد ان مقدار هذا الكسر يكون واحدا وان الطرف الثاني ياخذ الصورة $\frac{\infty}{\infty}$ فبتطبيق القاعدة السابقة نجد ان

$$\text{نها}\frac{\text{ق(س)}+\text{م(س)}}{\text{م(س)}} = \text{١} = \text{نها}\frac{\text{ق}'\text{(س)}+\text{م}'\text{(س)}}{\text{م}'\text{(س)}} = \text{نها}\frac{\text{ق}'\text{(س)}}{\text{م}'\text{(س)}}+\text{١}$$

ومن هنا $\text{نها}\frac{\text{ق}'\text{(س)}}{\text{م}'\text{(س)}} = \text{٠}$

ويؤخذ من هذا ان المقدار الحقيقي اذا كان صفرا يساوي أيضا نسبة

المشتقتين $\text{ق}'(\text{س})$ و $\text{م}'(\text{س})$ اما اذا كانت $\text{نها}\,\frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{م}'(\text{س})}$ أى المقدار الحقيقى لانهائيا يكون $\text{نها}\,\frac{\text{م}'(\text{س})}{\text{ق}'(\text{س})}=0$

فحينئذ كما تقدم $\text{نها}\,\frac{\text{م}(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})}=0$

وعليه $\text{نها}\,\frac{\text{ق}(\text{س})}{\text{م}(\text{س})}=\infty$

ففى كل الحالات يكون $\text{نها}\,\frac{\text{ق}(\text{س})}{\text{م}(\text{س})}=\text{نها}\,\frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{م}'(\text{س})}$

(أمثلة)

١ . اذا فرض ان $\text{س}=0$ يكون $\frac{\text{لع}\left(\frac{1}{\text{س}}\right)}{\text{ظتا}(\text{س})}=\frac{\infty}{\infty}$

فنجد

$$\text{نها}\,\frac{\text{لع}\left(\frac{1}{\text{س}}\right)}{\text{ظتا}(\text{س})}=\text{نها}\,\frac{\left(-\frac{1}{\text{س}}\right)}{\left(-\frac{1}{\text{حا}^2\text{س}}\right)}=\text{نها}\,\frac{\text{حا}^2\text{س}}{\text{س}}$$

وحيث ان النهاية الاخيرة تؤول الى $\frac{0}{0}$ يحدث

$$\text{نها}\,\frac{\text{لع}\left(\frac{1}{\text{س}}\right)}{\text{ظتا}\,\text{س}}=\text{نها}\,\frac{2\,\text{حا}\,\text{س}\,\text{جتا}\,\text{س}}{1}=0$$

٢ . اذا فرضنا ان $\text{س}=\infty$ يكون $\frac{\text{س}^3}{\text{هـ}^{\text{س}}}=\frac{\infty}{\infty}$ فنجد

$$\text{نها}\,\frac{\text{س}^3}{\text{هـ}^{\text{س}}}=\text{نها}\,\frac{3\text{س}^2}{\text{هـ}^{\text{س}}}=\text{نها}\,\frac{6\text{س}}{\text{هـ}^{\text{س}}}=\text{نها}\,\frac{6}{\text{هـ}^{\text{س}}}=0$$

٣ . بفرض ان $\text{س}=\infty$ نجد

$$\text{نها}\,\frac{\text{لع}(\text{ب}+\text{جـ}\,\text{هـ}^{\text{س}})}{\sqrt{\text{د}+\text{هـ}\,\text{س}^2}}=\text{نها}\,\frac{\left(\frac{\text{جـ}\,\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{ب}+\text{جـ}\,\text{هـ}^{\text{س}}}\right)}{\left(\frac{\text{هـ}\,\text{س}}{\sqrt{\text{د}+\text{هـ}\,\text{س}^2}}\right)}=\text{نها}\,\frac{\left(\frac{\text{جـ}}{\frac{\text{ب}}{\text{هـ}^{\text{س}}}+\text{جـ}}\right)}{\left(\frac{\text{هـ}}{\sqrt{\frac{\text{د}}{\text{س}^2}+\text{هـ}}}\right)}=\frac{\;}{\sqrt{\text{هـ}}}$$

(تمرينات)

(تمرينات)

١. $\frac{ح^{س}}{س^{ن}} = \frac{\infty}{\infty}$ بفرض س = ∞ و ن > ٠ الجواب م = ∞

٢. $\frac{لع(ح + هـ^{س})}{\sqrt{ح + ن\, س^{٢}}} = \frac{\infty}{\infty}$ بفرض س = ∞ الجواب م = $\frac{١}{\sqrt{ن}}$

٣. $\frac{لع(طتا\, ن\, س)}{لع(طتا\, س)} = \frac{\infty}{\infty}$ بفرض س = ٠ الجواب م = ١

٤. $\frac{لع(س - ح)}{لع(هـ^{س} - هـ^{ح})} = \frac{\infty}{\infty}$ بفرض س = ح الجواب م = ١

٥. $\frac{لع(١ - س)}{طا \frac{\pi}{٢} س} = \frac{-\infty}{\infty}$ بفرض س = ١ الجواب م = ٠

* (في المقدار الحقيقي للمتعلمات ذات الصورة

٠ × ∞ و ١^∞ و ∞^٠ و ٠^٠ و ∞ − ∞) *

٣٦. لنفرض م (ح) = ٠ و ق (ح) = ∞ فللتحصيل على مقدار حاصل الضرب م (س) × ق (س) المفروض فيه ان س = ح نكتب

$$م(س) \times ق(س) = \frac{م(س)}{\left[\frac{١}{ق(س)}\right]} \quad او \quad \frac{ق(س)}{\left[\frac{١}{م(س)}\right]}$$

فتؤل المسئلة الى البحث عن مقدار متعلقة ذات صورة هي $\frac{٠}{٠}$ او $\frac{\infty}{\infty}$ فبتطبيق القواعد السابقة نجد

$$نها\, م(س)\, ق(س) = -\, نها\, ق(س)^{٢} \frac{مَ(س)}{قَ(س)} = -\, نها\, م(س)^{٢} \frac{قَ(س)}{مَ(س)}$$

(امثلة)

١. ليكن س لع س فاذا فرض ان س = ٠ نجد

$$نها\, س\, لع\, س = نها \frac{لع\, س}{\left(\frac{١}{س}\right)} = نها \frac{\left(\frac{١}{س}\right)}{\left(-\frac{١}{س^{٢}}\right)} = -\, نها\, س = ٠$$

٢٠ ليكن $e^{-س}$ لع س فبفرض س = ∞ يكون

$$نها\ e^{-س}\ لع\ س = نها\ \frac{لع\ س}{e^{س}} = نها\ \frac{(\frac{1}{س})}{e^{س}} = 0$$

٣٠ ليكن س لع $(\frac{س-ح}{س+ح})$ فبفرض س = ∞ نجد

$$نها\ س\ لع\ (\frac{س-ح}{س+ح}) = نها\ \frac{لع\ (\frac{س-ح}{س+ح})}{(\frac{1}{س})} = نها\ \frac{-2ح س^2}{س^2-ح^2} = -2ح$$

(تمرينات)

١٠ $س\ e^{\frac{1}{س}}$ = ٠ × ∞ بفرض س = ٠ الجواب م = ∞

٢٠ لع جتا س × طتا س = ٠ × ∞ بفرض س = ٠ الجواب م = ٠

٣٠ قوحا س × طتا س = ٠ × ∞ بفرض س = ٠ الجواب م = ١

٣٧٠ ولايجاد المقدار الحقيقي للمنطقة $ق(س)^{م(س)}$ اذا كان كل من ق(س) و م(س) صفرا ولانهائيا تأخذ اللوغاريتم النبرياني فيحدث

م(س) لع ق(س)

فآل الامر الى الحالة السابقة ومتى علم مقدار حاصل الضرب الاخير ولنفرضه ل مثلا يكون مقدار الكمية المفروضة $e^{ل}$

(امثلة)

١٠ ليكن $(1+حس)^{\frac{1}{س}}$ فاذا فرض س = ٠ آلت الكمية المذكورة الى 1^{∞} بأخذ اللوغاريتم نجد

$$\frac{لع(1+حس)}{س}$$

وحينئذ يكون $نها\ \frac{لع(1+حس)}{س} = نها\ \frac{\frac{ح}{1+حس}}{1} = ح$

فيكون

فيكون المقدار الحقيق $\text{نها}\ (1 + ح\, س)^{\frac{1}{س}} = ه^{ح}$

٢٠ ليكن $س^{س}$ ولنفرض $س = ٠$ فنجد أولا لع $س^{س} = س$ لع $س$
وحيث ان نهاية هذا اللوغاريتم صفر يكون

$$\text{نها}\ س^{س} = ١$$

٣٠ ليكن $\left(\frac{1}{س}\right)^{\text{طا}\,س}$ بفرض $س = ٠$ نجد أولا طا $س$ لع $\left(\frac{1}{س}\right)$
او $\frac{\text{طا}\,س}{\frac{1}{[\ \text{لع}\left(\frac{1}{س}\right)\ ]}}$ وباخذ مشتق البسط والمقام يحدث

$$\frac{\left(\frac{1}{\text{جتا}^{2}\,س}\right)}{\left(-\frac{1}{س}\right)} = -\frac{س}{\text{جتا}^{2}\,س}$$

فاذا يكون

$$\text{نها}\left(-\frac{س}{\text{جتا}^{2}\,س}\right) = ٠$$

والمقدار الحقيق المطلوب

$$\text{نها}\ \left(\frac{1}{س}\right)^{\text{طا}\,س} = ١$$

(تمرينات)

٠١ $س^{\frac{1}{س}} = \infty^{٠}$ بفرض $س = \infty$ الجواب $م = ١$

٠٢ $(ه - س)^{\frac{1}{ح\,س + ء}} = \infty^{٠}$ بفرض $س = \infty$ الجواب

$$م = ه^{-\frac{-}{ح}}$$

٣. $(\text{ظاس})^{\text{ظا٢س}} = 1^{\infty}$ بفرض س $= \frac{\text{ط}}{4}$ الجواب م $= \frac{1}{\text{ه}}$

٣٨. اذا كان ق(س) $= \infty$ و م(س) $= \infty$ بفرض س = ح باخذ الفرق ق(س) − م(س) الصورة غير المعينة $\infty - \infty$ فلايجاد مقداره الحقيقي نجعل للمتعلقتين المذكورتين مقاما مشتركا حتى باخذ الفرق الصورة $\frac{0}{0}$ ثم يجرى العمل كما تقدم

ليكن مثلا ق(س) $= \frac{1}{\text{س}}$ و م(س) = طتا س فاذا فرضنا س = ٠ نجد

$$\text{ق(س)} - \text{م(س)} = \frac{1}{\text{س}} - \text{طتا س} = \infty - \infty$$

واذا يكون

$$\text{نها}\left(\frac{1}{\text{س}} - \text{طتا س}\right) = \text{نها}\frac{\text{جا س} - \text{س جتا س}}{\text{س جا س}} =$$

$$\text{نها}\frac{\text{س جا س}}{\text{جا س} + \text{س جتا س}} = 0$$

(تمرينات)

١. $\frac{2 + \text{جتا س}}{\text{س}^3\,\text{جا س}} - \frac{3}{\text{س}^4} = \infty - \infty$ بفرض س = ٠

الجواب م $= \frac{1}{60}$

٢. $\frac{\text{ه س} - 1}{2\,\text{س}^2} + \frac{\text{ه}}{\text{س}\left(\text{ه}^{\text{ه س}} - 1\right)} = \infty - \infty$ بفرض س =

الجواب م $= \frac{\text{ه}^2}{6}$

٣. $\frac{1}{\text{س}^2} - \text{ظتا}^2\,\text{س} = \infty - \infty$ بفرض س = ٠

الجواب م $= \frac{2}{3}$

٣٩. في بعض الاحيان نسبة مشتقات $\text{ق}^{\text{ن}}$(س) و $\text{م}^{\text{ن}}$(س) تكون دائما $\frac{\infty}{\infty}$ بفرض س = ح فاذا أريد ايجاد المقدار الحقيقي بواسطة

القواعد

القواعد السابقة نجد انها تحدث صعوبة في العمل

ليكن مثلا

$$\frac{\sqrt{س} - \sqrt{ح} + \sqrt{س - ح}}{\sqrt{س^{2} - ح^{2}}}$$

فاذا فرضنا ان $س = ح$ ينعدم حدا هذا الكسر وتكون جميع مشتقات كل من الحدين لانهائية فللتحصيل على المقدار الحقيقي نجعل $س = ح + ة$ فيؤل الكسر الى

$$\frac{\left(\frac{\sqrt{ح + ة} - \sqrt{ح}}{\sqrt{ة}} + ١\right)}{\sqrt{٢ ح + ة}}$$

فاذا فرضنا الآن ان $ة = ٠$ نجد $\frac{١}{\sqrt{٢ ح}}$ وهو المقدار المطلوب

الباب السابع

في المتسلسلات

٤٠ . المتسلسلة هي ما تتكون من حدود متتابعة موجبة او سالبة لا ينتهي عددها وتكونها يكون بحسب قاعدة معلومة

واذا رمزنا بالحرف $ج_{ن}$ لحاصل جمع حدود عددها ن يكون

$$ج_{ن} = ة_{٠} + ة_{١} + ة_{٢} + ة_{٣} + ة_{٤} + \cdots + ة_{ن-١}$$

فاذا فرضنا انه كلما كبر ن يقرب $ج_{ن}$ الى نهاية معينة محدودة ج يقال ان المتسلسلة غائية ويكون ج هو حاصل الجمع حقيقة واذا لم يكن للمجموع $ج_{ن}$ غاية ينتهي اليها تسمى المتسلسلة غير غائية وليس لها حاصل جمع

لتكن مثلا المتوالية الهندسية

∴ ح : ح ة : ح $ة^{٢}$: ح $ة^{٣}$: ح $ة^{٤}$: ...... : ح $ة^{ن-١}$: ح $ة^{ن}$: ....

ومن المعلوم ان حاصل جمع حدودها الاولى التي عددها ن هو

$$ج_{ن} = \frac{ح - ح\,ة^{ن-١}}{١ - ة} = \frac{ح}{١ - ة} - \frac{ح\,ة^{ن-١}}{١ - ة}$$

فاذا فرض ان ة اقل من الواحد فان $ج_{ن}$ يقرب من $\frac{ح}{١ - ة}$ كلما ازداد ن واذا كان أكبر منه أو مساوياله فيكبر $ج_{ن}$ و يصير لانهائيا

٤١ . ولنذكر بعض نظريات ناتجة من مقابلة متسلسلة بمتوالية هندسية فنقول

(النظرية الاولى) المتسلسلة ذات الحدود الموجبة تكون غائبة اذا كانت نسبة أي حد من الحدود الآتية بعد حد معلوم الى ماقبله أصغر من كمية مفروضة أقل من الواحد

مثلا في المتسلسلة

$ة_{٠}$ ، $ة_{١}$ ، $ة_{٢}$ ، $ة_{٣}$ ...... $ة_{ن}$ ، $ة_{ن+١}$ ....

ذات الحدود الموجبة اذا فرض انه من ابتداء الحد $ة_{ن}$ العام يكون

$\frac{ة_{ن+١}}{ة_{ن}} < ر$ ، $\frac{ة_{ن+٢}}{ة_{ن+١}} < ر$ ... (بفرض ر < ١)

تكون هذه المتسلسلة غائبة

برهانه ان يقال من المتباينات السابقة ينتج ان

$ة_{ن+١} < ر\,ة_{ن}$ ، $ة_{ن+٢} < ر\,ة_{ن+١}$ ، $ة_{ن+٣} < ر\,ة_{ن+٢}$ .....

ومن

ومن هنا

$$ق_{د+١} < ن\,ق_{د} \;,\; ق_{د+٢} < ن^{٢}\,ق_{د} \;,\; ق_{د+٣} < ن^{٣}\,ق_{د} \;.......$$

فالاطراف الثانية من هذه المتباينات الاخيرة تكون هذه المتوالية الهندسية

$$\because\; ق_{د} : ق_{د}\,ن : ق_{د}\,ن^{٢} : ق_{د}\,ن^{٣} : ق_{د}\,ن^{٤} : ق_{د}\,ن^{٥} ....$$

التي أساسها $ن$ وحاصل جمعها $\frac{ق_{د}}{١-ن}$ ويشاهد حينئذ ان حدود المتسلسلة المفروضة من ابتداء الحد $ق_{د}$ اصغر من حدود هذه المتوالية وبذا يكون حاصل جمع حدود المتسلسلة وهو $ج$ منحصرا بين $ج_{د}$ (حاصل جمع حدود المتسلسلة التي قبل $ق_{د}$) و $ج_{د} + \frac{ق_{د}}{١-ن}$ وحينئذ تكون المتسلسلة غائية وهو المطلوب اما في حالة العكس اعني اذا كانت النسب المذكورة أكبر من الكمية $ن$ (بفرض $ن > ١$) فالمتسلسلة تكون غير غائية لانه في هذه الحالة تأخذ الحدود $ق_{د}$, $ق_{د+١}$ ... في التصاعد وتصير أكبر من حدود المتوالية الهندسية التصاعدية

$$\because\; ق_{د} : ق_{د}\,ن : ق_{د}\,ن^{٢} : ق_{د}\,ن^{٣} : ق_{د}\,ن^{٤} : ....$$

التي لانهاية لحاصل جمعها

(النظرية الثانية) اذا فرض في المتسلسلة ذات الحدود الموجبة

ان $ق_{٠}$, $ق_{١}$, $ق_{٢}$, $ق_{٣}$, $ق_{٤}$ ....

$$\sqrt[د]{ق_{د}} < ن \;,\; \sqrt[د+١]{ق_{د+١}} < ن \;,\; \sqrt[د+٢]{ق_{د+٢}} < ن \;....$$

($ن$ كمية أقل من الواحد) تكون المتسلسلة المذكورة غائية

لانه ينتج من المفروضات ان

$$ق_{د} < ن^{د} \;,\; ق_{د+١} < ن^{د+١} \;,\; ق_{د+٢} < ن^{د+٢} \;,\; ....$$

فحينئذ يكون

$$ق_{د} + ق_{د+١} + ق_{د+٢} ...... < ن^{د} + ن^{د+١} + ن^{د+٢} + ...$$

وحيث ان الطرف الثاني (الذي هو متوالية هندسية) يساوي $\frac{ن^{د}}{١-ن}$ فيكون حاصل جمع المتسلسلة أقل من هذه الكمية المحدودة وحينئذ تكون غائية وهو المطلوب

واذا كانت الجذور المذكورة أكبر من $ب$ (بفرض $ب > ١$) فالمتسلسلة تكون غير غائية

(النظرية الثالثة) اذا كانت حدود المتسلسلة الآتية بعد الحد $ق_ن$ موجبة وسالبة على التعاقب وتنقص كلما ازداد عدد هذه الحدود تكون المتسلسلة غائية

لتكن المتسلسلة .... $ق_ن - ق_{ن+١} + ق_{ن+٢} - ق_{ن+٣} + ق_{ن+٤} - ......$

فاذا فرض ان

$$ق_ن = ط_ن$$
$$ق_{ن+١} = ط_{ن+١}$$
$$ق_{ن+٢} = ط_{ن+٢}$$

يكون

$$ق_ن - ق_{ن+١} + ق_{ن+٢} - ق_{ن+٣} + \cdots = (ط_ن - ط_{ن+١}) + (ط_{ن+٢} - ط_{ن+٣}) + \cdots$$
$$= ط_ن - (ط_{ن+١} - ط_{ن+٢}) - (ط_{ن+٣} - ط_{ن+٤}) \cdots\cdots$$

وحيث فرضنا $ط_ن > ط_{ن+١} > ط_{ن+٢} > ط_{ن+٣} > ط_{ن+٤} > \cdots$

تكون الطروح $(ط_{ن+١} - ط_{ن+٢})$ و $(ط_{ن+٣} - ط_{ن+٤})$ .. الخ كلها موجبة ومن هذا ينتج ان حاصل جمع المتسلسلة المفروضة كمية موجبة أصغر من $ط_ن$ وحينئذ يكون هذا الحاصل محصورا بين $ج_ن$ و $ج_ن + ط_ن$ فهي غائية وهو ما أردنا تبيينه

(النظرية الرابعة) اذا تناقصت حدود المتسلسلة

$$ق_٠ \text{ و } ق_١ \text{ و } ق_٢ \text{ و } ق_٣ \cdots\cdots$$

من ابتداء الحد الاول فهي تابعة لهذه المتسلسلة (١)

$$ق_٠ \text{ و } ٢ق_١ \text{ و } ٤ق_٣ \text{ و } ٨ق_٧ \text{ و } ١٦ق_{١٥} \cdots\cdots$$

لانه لو وضعنا حاصل جمع حدود المتسلسلة الاولى بهذه الصورة

$$ق_٠ + (ق_١ + ق_٢) + (ق_٣ + ق_٤ + ق_٥ + ق_٦) + (ق_٧ + \cdots\cdots + ق_{١٤}) + \cdots$$

(١) اعنى انه اذا كانت احداهما غائية تكون الاخرى غائية ايضا وبالعكس

ولا

ولاحظنا ما فرضنا من تناقص الحدود لحدث

$$ق_١ + ق_٢ < ٢ ق_١$$
$$ق_٣ + ق_٤ + ق_٥ + ق_٦ < ٤ ق_٣$$
$$ق_٧ + \cdots\cdots + ق_{١٤} < ٨ ق_٧$$

فيكون

$$ق_٠ + ق_١ + ق_٢ + ق_٣ + \cdots\cdots < ق_٠ + ٢ ق_١ + ٤ ق_٣ + ٨ ق_٧ + \cdots\cdots$$

وبوضع حاصل الجمع لحدود المتسلسلة المفروضة بهذه الكيفية

$$ق_٠ + ق_١ + (ق_٢ + ق_٣) + (ق_٤ + ق_٥ + ق_٦ + ق_٧) + (ق_٨ + \cdots + ق_{١٥}) + \cdots$$

واجراء العمل كما سبق نجد

$$ق_٠ + ق_١ + ق_٢ + ق_٣ + \cdots\cdots > ق_٠ + ق_١ + ٤ ق_٧ + ٨ ق_{١٥} + \cdots$$

أو

$$ق_٠ + ق_١ + ق_٢ + ق_٣ + \cdots\cdots > \tfrac{١}{٢} ق_٠ + \tfrac{١}{٢}(ق_٠ + ٢ ق_١ + ٤ ق_٣ + ٨ ق_٦ + \cdots)$$

ويظهر من هاتين المتباينتين ان غاية احدى المتسلسلتين تقتضي غاية الاخرى وغير غائية احداهما كذلك

(أمثلة لتطبيق ما سبق)

١ . لتكن المتسلسلة

$$١ + \frac{س}{١} + \frac{س^٢}{!٢} + \frac{س^٣}{!٣} + \frac{س^٤}{!٤} + \cdots\cdots$$

التي حدها العام $ق_ن = \frac{س^ن}{!ن}$ والحد التالي له $\frac{س^{ن+١}}{!(ن+١)}$ فالنسبة

$$\frac{ق_{ن+١}}{ق_ن} = \frac{س}{ن+١}$$

واذا رمزنا بالحرف ن لأكبر عدد صحيح يحتوي عليه س نجد $\frac{س}{ن+١} < ١$

وبمقتضى النظرية الاولى تكون المتسلسلة غائية

واذا فرضنا $س = ١$ تحدث المتسلسلة

$$١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{!٣} + \frac{١}{!٤} + \frac{١}{!٥} + \cdots\cdots = \propto$$

وقد سبق الكلام عليها

٢ . المتسلسلة

$$١ - \frac{س}{١} + \frac{س^٢}{٢} - \frac{س^٣}{٣} + \frac{س^٤}{٤} - \cdots\cdots$$

تكون بموجب النظرية الثانية غائية اذا كان س $<$ ١ أو س = ١

٣ . اذا فرض فى المتسلسلة

$$١ + \frac{١}{ح_٢} + \frac{١}{ح_٣} + \frac{١}{ح_٤} + \cdots\cdots$$

ان ح عدد موجب نجد

$$\frac{ق+١}{ق} = \left(\frac{١}{ق+١}\right)^{ح} = \frac{١}{(١+\frac{١}{ق})^{ح}}$$

وهذه النسبة تعادل الوحدة فلا يمكن ان تنبئنا النظرية الاولى عن غائية المتسلسلة ولكن لو لوحظ ماقيل فى النظرية الرابعة وأخذت المتسلسلة ق + ٢ ق$_١$ + ٤ق$_٣$ + ٨ق$_٧$ + ... التى تصير فى هذه الحالة

$$١ + \frac{٢}{ح_٢} + \frac{٤}{ح_٤} + \frac{٨}{ح_٨} + \cdots\cdots$$

أو

$$١ + \frac{١}{١-ح_٢} + \frac{١}{١-ح_٤} + \frac{١}{١-ح_٨} + \cdots\cdots$$

لحدثت متوالية هندسية أساسها $\frac{١}{١-ح_٢}$ فالمتسلسلة تكون غائية اذا كان

$\frac{١}{١-ح_٢} < ١$ أو ح $>$ ١ وغير غائية اذا كان ح $<$ ١ أو ح = ١

فينتج من هذا ان المتسلسلة

$$١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٥} + \cdots\cdots$$

غير غائية

الباب الثامن

فى متسلسلة تيلور (١)

(١) ولد فى الانجليز فى سنة ١٦٣٥ ومات سنة ١٧٣١

٤١ • لنفرض المتعلقة $س^{ح}$ وان ح عدد صحيح موجب فاذا زادت س المقدار ع يحدث بمقتضى قانون نيوتون

$$(س + ع)^{ح} = س^{ح} + ح س^{ح-1} ع + \frac{ح(ح-1)}{2!} س^{ح-2} ع^{2} + \frac{ح(ح-1)(ح-2)}{3!} س^{ح-3} ع^{3} + \cdots\cdots$$

وبالمشاهدة نجد ان $ح س^{ح-1}$ و $ح(ح-1) س^{ح-2}$ .... هي مشتقات $س^{ح}$ المتتابعة فبجعل $س^{ح} = م(س)$ تؤول المتساوية السابقة الى

$$م(س+ح) = م(س) + \frac{ع}{1} م'(س) + \frac{ع^{2}}{2!} م''(س) + \frac{ع^{3}}{3!} م'''(س) + \cdots\cdots \qquad (1)$$

وحيث ان المشتقات ذات المراتب العالية عن ح معدومة فهذه المتسلسلة تنتهي الى الحد ذي المرتبة ح + ١

ولنبرهن على انه مهما فرضت المتعلقة م (س) اذا امكن نشر م (س+ع) الى متسلسلة غائية مثل

$$ن_{0} + ن_{1} ع + ن_{2} ع^{2} + ن_{3} ع^{3} + \cdots\cdots \qquad (2)$$

مرتبة على حسب القوى الصحيحة الموجبة للكمية ع تكون هذه المتسلسلة عين المتسلسلة المتحصلة من القانون (١) . فنقول اذا فرضنا ان المتسلسلة (٢) تكون غائية بالنسبة لجميع مقادير ع التي هي اقل من $ع'$ يحدث

$$\text{م}\left(\text{س}+\text{ع}\right)=\text{ب}_{٠}+\text{ب}_{١}\,\text{ع}+\text{ب}_{٢}\,\text{ع}^{٢}+\text{ب}_{٣}\,\text{ع}^{٣}+\cdots\cdots\qquad(٣)$$

وباعتبار طرفي هذه المعادلة متعلقتين بالكمية ع تكون مشتقاتهما متساويتين (مادام ع > ع) أعني يكون

$$\text{م}'\left(\text{س}+\text{ع}\right)=\text{ب}_{١}+٢\,\text{ب}_{٢}\,\text{ع}+٣\,\text{ب}_{٣}\,\text{ع}^{٢}+٤\,\text{ب}_{٤}\,\text{ع}^{٣}+\cdots\cdots$$

ويكون ايضا

$$\text{م}''\left(\text{س}+\text{ع}\right)=٢\,\text{ب}_{٢}+٢\times٣\,\text{ب}_{٣}\,\text{ع}+٣\times٤\,\text{ب}_{٤}\,\text{ع}^{٢}+\cdots\cdots$$

وايضا

$$\text{م}'''\left(\text{س}+\text{ع}\right)=٢\times٣\,\text{ب}_{٣}+٢\times٣\times٤\,\text{ب}_{٤}\,\text{ع}+\cdots\cdots$$

....

فاذا فرضنا ان ع = ٠ في المعادلة (٣) وما بعدها يحدث

$$\text{م}(\text{س})=\text{ب}_{٠}\ ،\ \text{م}'(\text{س})=\text{ب}_{١}\ ،\ \text{م}''(\text{س})=٢\,\text{ب}_{٢}\ ،\ \text{م}'''(\text{س})=٢\times٣\,\text{ب}_{٣}\cdots\cdots$$

$$\text{او}\quad \text{ب}_{٠}=\text{م}(\text{س})\ ،\ \text{ب}_{١}=\text{م}'(\text{س})\ ،\ \text{ب}_{٢}=\frac{١}{٢}\,\text{م}''(\text{س})\ ،\ \text{ب}_{٣}=\frac{١}{٢\times٣}\,\text{م}'''(\text{س})\cdots\cdots$$

وبوضع

و بوضع هذه المقادير فى المعادلة (٣) نجد القانون (١)

وينتج من هذا ان نشر المتعلقة م (س + ء) الى متسلسلة غائية مرتبة على حسب قوى ء الصحيحة الموجبة يوجد بواسطة القانون المذكور المسمى قانون تيلور أو متسلسلته

٤٢ . حيث انه لا يمكن استعمال متسلسلة تيلور فى نشر المتعلقات الا اذا كانت غائية فيلزم البحث عن الباقى من طرح الحدود الاول الذى عددها ن من المتعلقة م (س + ء)

فانه ان قرب هذا الباقى من الصفر كلما زاد ن تكن م (س + ء) غاية المتسلسلة فيمكن نشرها وان زاد الباقى كلما زاد ن تكن غير غائية ويصير نشرها بواسطة قانون تيلور مستحيلا

لنرمز بالحرف ب للباقى المذكور فنجد

$$\text{ب} = \text{م}(\text{س}+\text{ء}) - \text{م}(\text{س}) - \text{ء}\,\text{م}'(\text{س}) - \frac{\text{ء}^{2}}{2!}\,\text{م}''(\text{س}) - \cdots - \frac{\text{ء}^{\text{ن}-1}}{(\text{ن}-1)!}\,\text{م}^{\text{ن}-1}(\text{س}) \qquad (٤)$$

وباعتبار ان طرفى هذه المعادلة متعلقتان بالكمية ء وفرضنا ان س ثابتة نجد

$$\frac{\text{د}\,\text{ب}}{\text{د}\,\text{ء}} = \text{م}'(\text{س}+\text{ء}) - \text{م}'(\text{س}) - \text{ء}\,\text{م}''(\text{س}) - \cdots - \frac{\text{ء}^{\text{ن}-2}}{(\text{ن}-2)!}\,\text{م}^{\text{ن}-1}(\text{س})$$

$$\frac{\text{د}^{2}\text{ب}}{\text{د}\,\text{ء}^{2}} = \text{م}''(\text{س}+\text{ء}) - \text{م}''(\text{س}) - \cdots\cdots - \frac{\text{ء}^{\text{ن}-3}}{(\text{ن}-3)!}\,\text{م}^{\text{ن}-1}(\text{س})$$

....

....

$$\frac{\text{د}^{\text{ن}-1}\text{ب}}{\text{د}\text{ء}^{\text{ن}-1}} = \text{م}^{\text{ن}-1}(\text{س}+\text{ء}) - \text{م}^{\text{ن}-1}(\text{س})$$

$$\frac{\text{د}^{\text{ن}}\text{ب}}{\text{د}\text{ء}^{\text{ن}}} = \text{م}^{\text{ن}}(\text{س}+\text{ء})$$

ويظهر من هنا انه اذا جعل ء = ٠ تنعدم المتعلقة ب ومشتقاتها من الاولى الى التي رتبتها ن − ١ والنونية تكون $\text{م}^{\text{ن}}(\text{س}+\text{ء})$ فاذا فرضت هذه الاخيرة محدودة مستمرة بين س و س + ء يمكن أن نجعل في القانون (٨) مطلب ٣٣ ر = ء و ج (ء) = ب و $\text{ج}^{\text{ن}}(\text{ء})$

$$= \frac{\text{د}^{\text{ن}}\text{ب}}{\text{د}\text{ء}^{\text{ن}}} = \text{م}^{\text{ن}}(\text{س}+\text{ء}) \quad \text{فيحدث}$$

$$\text{ب} = \frac{\text{ء}^{\text{ن}}}{\text{ن}!}\,\text{م}^{\text{ن}}(\text{س}+\text{ث}\,\text{ء}) \qquad (١)$$

وبوضع هذا المقدار في المعادلة (٤) يحدث

$$(٦)\quad \text{م}(\text{س}+\text{ء}) = \text{م}(\text{س}) + \text{ء}\,\text{م}'(\text{س}) + \frac{\text{ء}^2}{2!}\text{م}''(\text{س}) + \frac{\text{ء}^3}{3!}\text{م}'''(\text{س}) + \cdots + \frac{\text{ء}^{\text{ن}-1}}{(\text{ن}-1)!}\text{م}^{\text{ن}-1}(\text{س}) + \frac{\text{ء}^{\text{ن}}}{\text{ن}!}\text{م}^{\text{ن}}(\text{س}+\text{ث}\,\text{ء})$$

وهذا التساوي يتحقق مع اى مقدار يفرض للكمية ء بشرط ان المتعلقات $\text{م}(\text{س})$ $\text{م}'(\text{س})$ و $\text{م}''(\text{س})$ و … $\text{م}^{\text{ن}-1}(\text{س})$ تكون محدودة وان $\text{م}^{\text{ن}}(\text{س})$ تكون محدودة ومستمرة بين س و س + ء

٤٣ . يمكن وضع قانون الباقى ب على صورة اخرى ولذلك نرمز بالحرف ط لكمية غير متعلقة بالمتغيرة وناخذ $\text{ج}'(\text{س})$ رمزا للمقدار

(١) ينسب ايجاد هذا القانون للاجرانج

$$\text{م}(\text{س}) + \frac{\text{ط}-\text{س}}{1}\,\text{م}'(\text{س}) + \frac{(\text{ط}-\text{س})^{2}}{2!}\,\text{م}''(\text{س}) + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{(\text{ط}-\text{س})^{\text{ن}-1}}{(\text{ن}-1)!}\,\text{م}^{\text{ن}-1}(\text{س})$$

الذى ينتج من وضع ط − س بدلا عن ء ويؤول الى م(ط) اذا فرض س = ط فيحدث

$$\text{مـ}(\text{س}) = \text{م}(\text{س}) + \frac{\text{ط}-\text{س}}{1}\,\text{م}'(\text{س}) + \frac{(\text{ط}-\text{س})^{2}}{2!}\,\text{م}''(\text{س}) +$$

$$\cdots\cdots + \frac{(\text{ط}-\text{س})^{\text{ن}-1}}{(\text{ن}-1)!}\,\text{م}^{\text{ن}-1}(\text{س}) \quad (1)$$

ويحدث أيضا

$$\text{مـ}(\text{ط}) = \text{م}(\text{ط}) \quad (2)$$

وبأخذ مشتقى طرفى المعادلة (١) بالنسبة الى س يكون

$$\text{مـ}'(\text{س}) = \text{م}'(\text{س}) + \frac{\text{ط}-\text{س}}{1}\,\text{م}''(\text{س}) + \frac{(\text{ط}-\text{س})^{2}}{2!}\,\text{م}'''(\text{س})$$

$$+ \cdots\cdots + \frac{(\text{ط}-\text{س})^{\text{ن}-2}}{(\text{ن}-2)!}\,\text{م}^{\text{ن}-1}(\text{س})$$

$$+ \frac{(\text{ط}-\text{س})^{\text{ن}-1}}{(\text{ن}-1)!}\,\text{م}^{\text{ن}}(\text{س}) - \text{م}'(\text{س}) - \frac{\text{ط}-\text{س}}{1}\,\text{م}''(\text{س}) -$$

$$\cdots\cdots - \frac{(\text{ط}-\text{س})^{\text{ن}-2}}{(\text{ن}-2)!}\,\text{م}^{\text{ن}-1}(\text{س})$$

وبحذف الحدود المتشابهة نجد

$$\text{مـ}'(\text{س}) = \frac{(\text{ط}-\text{س})^{\text{ن}-1}}{(\text{ن}-1)!}\,\text{م}^{\text{ن}}(\text{س}) \quad (3)$$

ولنضع ط − س بدلا عن ء فى القانون المعلوم

$$\text{مـ}(\text{س}+\text{ء}) = \text{مـ}(\text{س}) + \text{ء}\,\text{مـ}'(\text{س}+\text{ة}\,\text{ء})$$

فنجد

$$\text{م}(\text{ط}) = \text{م}(\text{س}) + (\text{ط} - \text{س})\,\text{مَ}[\text{س} + \text{ة}(\text{ط} - \text{س})] \quad (٤)$$

واذا أخذنا في (٣) س + ة (ط − س) بدلا عن س نجد

$$\text{مَ}[\text{س} + \text{ة}(\text{ط} - \text{س})] = \frac{(\text{ط} - \text{س})^{\text{ن}-١}(١ - \text{ة})^{\text{ن}-١}}{(\text{ن}-١)!} \times \text{م}^{\text{ن}}[\text{س} + \text{ة}(\text{ط} - \text{س})]$$

وبوضع هذا المقدار في (٤) وأخذ بدلا عن م (ط) و م (س) ما ساواهما في (١) و (٢) يحدث

$$\text{م}(\text{ط}) = \text{م}(\text{س}) + \frac{(\text{ط}-\text{س})}{١}\,\text{مَ}(\text{س}) + \frac{(\text{ط}-\text{س})^{٢}}{٢!}\,\text{مً}(\text{س}) + \cdots\cdots + \frac{(\text{ط}-\text{س})^{\text{ن}-١}}{(\text{ن}-١)!}\,\text{م}^{\text{ن}-١}(\text{س}) + \frac{(\text{ط}-\text{س})^{\text{ن}}(١-\text{ة})^{\text{ن}-١}}{(\text{ن}-١)!}\,\text{م}^{\text{ن}-١}[\text{س}+\text{ة}(\text{ط}-\text{س})]$$

فاذا وضعت الآن الكمية ع محلها اعني بدلا عن (ط − س) يكون

$$\text{م}(\text{س} + \text{ع}) = \text{م}(\text{س}) + \frac{\text{ع}}{١}\,\text{مَ}(\text{س}) + \frac{\text{ع}^{٢}}{٢!}\,\text{مً}(\text{س}) + \frac{\text{ع}^{٣}}{٣!}\,\text{م}'''(\text{س}) + \cdots\cdots + \frac{\text{ع}^{\text{ن}-١}}{(\text{ن}-١)!}\,\text{م}^{\text{ن}-١}(\text{س}) + \frac{\text{ع}^{\text{ن}}(١-\text{ة})^{(\text{ن}-١)}}{(\text{ن}-١)!}\,\text{م}^{\text{ن}}(\text{س} + \text{ة}\,\text{ع}) \quad (١)\ (١)$$

وهو المطلوب

٤٤ • بواسطة القانونين (١) و (٢) نعرف الحالة التي فيها يمكن بسط المتعلقة م (س + ع) الى متسلسلة غائبة على حسب قانون تيلور لانه

(١) ينسب شكل الباقي هذا الى كوشي وهو احد الرياضيين الفرنساويين ولد سنة ١٧٨٩ ومات سنة ١٨٠٧

إذا

اذا قرب أحد الباقيين

$$\frac{\text{ع}^{\text{ن}}}{\text{ن}!}(\text{س}+\text{ث}\,\text{ع}) \quad \text{و} \quad \frac{\text{ع}^{\text{ن}}(\text{١}-\text{ث})^{\text{ن}-\text{١}}}{(\text{ن}-\text{١})!}\,\text{م}^{\text{ن}}(\text{س}+\text{ث}\,\text{ع})$$

من الصفر كلما ازاد ن وبفرض مقدار معلوم للكمية ع تكون متسلسلة تيلور غائية وتكون م (س + ع) هي حاصل جمعها وحينئذ يمكن نشر هذه المتعلقة الى متسلسلة

وماذكر يكون مثلا اذا بقيت $\text{م}^{\text{ن}}(\text{س})$ محدودة بين النهايتين س و س + ع كلما ازاد ن لانه اذا رمزنا بالحرف ن َ لاكبر عدد صحيح تشتمل عليه ع يكون

$$\frac{\text{ع}^{\text{ن}}}{\text{ن}!}=\frac{\text{ع}^{\text{ن}'}}{\text{ن}'!}\times\frac{\text{ع}}{\text{ن}'+\text{١}}\times\frac{\text{ع}}{\text{ن}'+\text{٢}}\times\cdots\cdots\times\text{ن}$$

وحيث ان كلا من العوامل $\frac{\text{ع}}{\text{ن}'+\text{١}}$ ، $\frac{\text{ع}}{\text{ن}'+\text{٢}}$ ، .... أصغر من الواحد وعددها ن − ن َ يكون حاصل ضربها اصغر من $\left(\frac{\text{ع}}{\text{ن}'+\text{١}}\right)^{\text{ن}-\text{ن}'}$ وحينئذ يكون

$$\frac{\text{ع}^{\text{ن}}}{\text{ن}!}<\frac{\text{ع}^{\text{ن}'}}{\text{ن}'!}\left(\frac{\text{ع}}{\text{ن}+\text{١}}\right)^{\text{ن}-\text{ن}'}$$

وبما ان $\left(\frac{\text{ع}}{\text{ن}'+\text{١}}\right)^{\text{ن}-\text{ن}'}$ يصغر كلما كبر ن فتنتهي هذه الكمية بان تصير صفرا وحينئذ تكون نهايتا $\frac{\text{ع}^{\text{ن}}}{\text{ن}!}$ و $\frac{\text{ع}^{\text{ن}}}{\text{ن}!}(\text{س}+\text{ث}\,\text{ع})$ صفرا أيضا لان $\text{م}^{\text{ن}}(\text{س}+\text{ث}\,\text{ع})$ محدودة بالفرض فيمكن بناء على ذلك نشر م (س + ع) الى متسلسلة غائية

(ملحوظ ١)

متى أريد بسط المتعلقة م (س + ع) الى الحد

$$\frac{\text{ع}^{\text{ن}-\text{١}}}{(\text{ن}-\text{١})!}\,\text{م}^{\text{ن}-\text{١}}(\text{س})$$

يكون الخطاء الناشئ مساويا للباقي

$$\frac{ء^{ن}}{ن!} م^{ن}(س + ة ء)$$

وحيث ان الكمية ة مجهولة يلزم ايجاد النهايتين اللتين ينحصر بينهما الباقي المذكور ولذا يستخرج أكبر مقادير $م^{ن}$ (س) واصغرها حينما تنتقل س متزايدة من س الى س + ء فاذا رمزنا لهذين المقدارين بالحرفين ك و ل يحدث

$$ك > م^{ن}(س + ة ء) > ل$$

فحينئذ يكون

$$\frac{ك ء^{ن}}{ن!} > \frac{ء^{ن}}{ن!} م^{ن}(س + ة ء) > \frac{ل ء^{ن}}{ن!}$$

أعني ان الخطا المذكور يكون أقل من $\frac{ك ء^{ن}}{ن!}$ وأكبر من $\frac{ل ء^{ن}}{ن!}$

(الملحوظ ٢) مهما كانت المتعلقة م (س) يمكن دائما أخذ ء صغيرة صغرا ليكون المقدار المطلق للباقي وهو

$\frac{ء^{ن}}{ن!} م^{ن}(س+ة ء)$ أصغر من الحد الاخير $\frac{ء^{ن-1}}{(ن-1)!} \times م^{ن-1}(س+ة ء)$

انما يشترط ان لا تنعدم المشتقة $م^{ن-1}$ (س) بمقدار س المعتبر ويكون هذا اذا كان عند اعتبار المقادير المطلقة فقط

$$\frac{ء^{ن}}{ن!} م^{ن}(س + ة ء) < \frac{ء^{ن-1}}{(ن-1)!} م^{ن-1}(س)$$

او

$$\frac{ء}{ن} م^{ن}(س + ة ء) < م^{ن-1}(س)$$

ويتحقق هذا الشرط باخذ ء صغيرة صغرا كافيا لان الطرف الاول ينعدم بفرض ء = ٠

ويمكن ان يلاحظ أيضا ان نسبة الباقي الى الحد الاخير وهي

$$\frac{ع^{ن}}{ن} \times \frac{م^{ن}(س+ة ع)}{م^{ن-١}(س)}$$

تصغر بقدر مايراد لانه اقرب من الصفر كلما انقص ع ·

متسلسلة ما كوران (١)

٤٥ · اذا فرضنا فى القانونين (١) و (١) ان س = · ووضعنا الحرف س عوضا عن ع نجد القانون م (س) = م (٠) + س مَ (٠) + $\frac{س^٢}{٢!}$ مً (٠) + $\frac{س^٣}{٣!}$ مً (٠) + ··· + $\frac{س^{ن-١}}{(ن-١)!}$ م$^{ن-١}$ (٠) + ب

الذى كتب فيه ب عوضا عن

$\frac{س^{ن}}{ن!}$ م^{ن} (ة س) أو عن $\frac{س^{ن}(١-ة)^{ن-١}}{(ن-١)!}$ م^{ن} (ة س)

وفرض فيه ان المتعلقة م (س) ومشتقاتها التى هى قبل النونية لا تصير لانهائية بجعل س = · وان م^{ن} (س) تكون محدودة مستمرة بين · و س فاذا قرب احد مقدارى الباقى ب من الصفر كلما ازادت ن يكون المتسلسلة

م (٠) + س مَ (س) (٠) + $\frac{س^٢}{٢!}$ مً (٠) + ·······

الغير منتهية غاية تماداها وهى م (س) اعنى

م (س) = م (٠) + س مَ (٠) + $\frac{س^٢}{٢!}$ مً (٠) + $\frac{س^٣}{٣!}$ مً (٠)
+ ········ (٢)

وهذا هو قانون ما كوران او متسلسلته ·

٤٦ · اذا صارت المتعلقة م (س) او احدى مشتقاتها لانهائية بفرض س = · فبسطها الى متسلسلة مرتبة على حسب

(١) ولد فى الانجليز سنة ١٦٩٨ ومات سنة ١٧٤٦

القوى الصحيحة الموجبة للمتغيرة س يكون مستحيلا في هذه الحالة يجعل في متسلسلة تيلور س = ح و ء = س − ح فيحدث

$$\text{م}(\text{س}) = \text{م}(\text{ح}) + \frac{(\text{س}-\text{ح})}{1}\,\text{مَ}(\text{ح}) + \frac{(\text{س}-\text{ح})^{2}}{2!}\,\text{مً}(\text{ح})$$

$$+ \cdots + \frac{(\text{س}-\text{ح})^{\text{ن}-1}}{(\text{ن}-1)!}\,\text{م}^{\text{ن}-1}(\text{ح}) + \text{ب}$$

والحرف ب يبين

$$\frac{(\text{س}-\text{ح})^{\text{ن}}}{\text{ن}!}\,\text{م}^{\text{ن}}\left[\text{ح} + \text{ة}\,(\text{س} - \text{ح})\right] \quad \text{او} \quad \frac{(\text{س}-\text{ح})^{\text{ن}}(1-\text{ة})^{\text{ن}-1}}{(\text{ن}-1)!} \times$$

$$\text{م}^{\text{ن}}\left[\text{ح} - \text{ة}\,(\text{س} - \text{ح})\right]$$

فبواسطة هذا القانون يمكن بسط م (س) على حسب قوى س − ح الصحيحة ولكن يلزم تعيين الثابتة ح بحيث أن المتعلقة م (س) ومشتقاتها لا تصير لا نهائية بفرض س = ح

٤٧ اذا شوهد عند اجراء العمل في نشر المتعلقة م (س) بواسطة قانون ماكلوران أن المتسلسلة غائية وأن الباقي يقرب من الصفر كلما ازداد ن الحكم بامكان نشرها ولكن غائية المتسلسلة لا تكفي وحدها في تحقيق ن حاصل جمع المتسلسلة المذكورة يكون م (س) لانه يوجد بعض متعلقات مثل المتعلقة $\text{ه}^{-\frac{1}{\text{س}^{2}}}$ تصير معدومة هي وجميع مشتقاتها بفرض س = ٠ فينتج من هذا انه اذا أمكن نشر م (س) الى متسلسلة غائية على حسب القانون المذكور نجد للمتعلقة م (س) + $\text{ه}^{-\frac{1}{\text{س}^{2}}}$ متسلسلة عين المتسلسلة السابقة ولكن عوضا عن أن يكون حاصل جمعها م (س) + $\text{ه}^{-\frac{1}{\text{س}^{2}}}$ يكون م (س) فيكون من الضروري حينئذ لمعرفة حاصل جمع متسلسلة غائية اعتبار الباقي ففي مثالنا الباقي من نشر

م (س) يقرب من الصفر والباقي من نشر المتعلقة $\text{م}(\text{س}) + -\frac{1}{\propto \text{س}^{2}}$

يقرب من $-\frac{1}{\propto \text{س}^{2}}$

٠٤٨ اذا جعلنا في متسلسلة تيلور ء = − س نجد

$$\text{م}(0) = \text{م}(\text{س}) - \text{س}\,\text{م}'(\text{س}) + \frac{\text{س}^{2}}{2!}\,\text{م}''(\text{س}) + $$

$$\frac{\text{س}^{3}}{3!}\,\text{م}'''(\text{س}) - \cdots\cdots$$

ومنه

$$\text{م}(\text{س}) = \text{م}(0) + \text{س}\,\text{م}'(\text{س}) - \frac{\text{س}^{2}}{2!}\,\text{م}''(\text{س}) + $$

$$\frac{\text{س}^{3}}{3!}\,\text{م}(\text{س}) - \cdots\cdots$$

وهو قانون بيرنولي (١)

الباب التاسع

(تطبيقات المتسلسلة ماكوران)

١ . قانون نيوتن

٠٤٩ ليكن $\text{م}(\text{س}) = (1 + \text{س})^{\text{ح}}$ الذي فيه ح عدد كيفما اتفق فنجد

$$\text{م}'(\text{س}) = \text{ح}\,(1 + \text{س})^{\text{ح}-1}$$

$$\text{م}''(\text{س}) = \text{ح}\,(\text{ح}-1)\,(1 + \text{س})^{\text{ح}-2}$$

$$\text{م}'''(\text{س}) = \text{ح}\,(\text{ح}-1)\,(\text{ح}-2)\,(1+\text{س})^{\text{ح}-3}$$

....

(١) جاك بيرنولي هو احد الرياضيين ذوي الابداع في هذا العلم ولد سنة ١٦٥٤ بالسويسرة ومات سنة ١٧٠٥

$$م^{(ن-1)}(س) = ح(ح-1)(ح-2)\cdots(ح-ن+2)(1+س)^{ح-ن+1}$$

$$م^{(ن)}(س) = ح(ح-1)(ح-2)\cdots(ح-ن+1)(1+س)^{ح-ن}$$

وبفرض $س = 0$ يكون

$$م(0) = 1$$

$$م'(0) = ح$$

$$م''(0) = ح(ح-1)$$

$$م'''(0) = ح(ح-1)(ح-2)$$

....

$$م^{(ن-1)}(0) = ح(ح-1)(ح-2)\cdots(ح-ن+2)$$

$$م^{(ن)}(ث س) = ح(ح-1)(ح-2)\cdots(ح-ن+1) \times (1+ث س)^{ح-ن}$$

وبموجب قانون ماكوران يكون

$$(1+س)^{ح} = 1 + \frac{ح}{1} س + \frac{ح(ح-1)}{2!} س^{2} + \frac{ح(ح-1)(ح-2)}{3!} س^{3} + \cdots + \frac{ح(ح-1)\cdots(ح-ن+2)}{(ن-1)!} س^{ن-1} + ب$$

مع فرض ان ب يساوي احدى الكميتين

$$\frac{ح(ح-1)(ح-2)\cdots(ح-ن+1)}{ن!} س^{ن} (1+ث س)^{ح-ن}$$

او

$$\frac{ح(ح-1)(ح-2)\cdots(ح-ن+1)}{(ن-1)!}(1-ث)^{ن-1}(1-ث س)^{ح-ن}$$

ويرى بغاية السهولة ان هذه السلسلة تكون غائية اوغير غائية على حسب

يكون

كون مقدار س المطلق أصغر أو أكبر من الواحد فانه اذا أخذنا $\text{ة}_{\text{ذ}}$ رمزا للحد الذي مرتبته ذ نجد

$$\text{ة}_{\text{ذ}-١}=\frac{\text{ح}(\text{ح}-١)(\text{ح}-٢)\cdots(\text{ح}-\text{ذ}+٢)}{(\text{ذ}-١)!}\,\text{س}^{\text{ذ}-١}$$

$$\text{و}\quad \text{ة}_{\text{ذ}}=\frac{\text{ح}(\text{ح}-١)(\text{ح}-٢)\cdots(\text{ح}-\text{ذ}+١)}{\text{ذ}!}\,\text{س}^{\text{ذ}}$$

ومن هنا

$$\frac{\text{ة}_{\text{ذ}}}{\text{ة}_{\text{ذ}-١}}=\frac{\text{ح}-\text{ذ}+١}{\text{ذ}}\,\text{س}=\frac{(\text{ح}+١)}{\text{ذ}}\,\text{س}-\text{س}$$

وحيث انه كلما ازداد ذ تقرب الكمية $\frac{(\text{ح}+١)\text{س}}{\text{ذ}}$ من الصفر فالنسبة المذكورة تقرب من $-\text{س}$ فاذا كانت س محصورة بين -١ و $+١$ ينتهى المقدار المطلق لهذه النسبة بان يصير أصغر من الواحد وتكون المتسلسلة غائية

اما اذا كانت س خارجة عن هاتين النهايتين فالنسبة $\frac{\text{ة}_{\text{ذ}}}{\text{ة}_{\text{ذ}-١}}$ تكون أكبر من الواحد وحينئذ المتسلسلة تكون غير غائية

٥٠ تسهل البرهنة على ان $(١+\text{س})^{\text{ح}}$ هو حاصل جمع المتسلسلة اذا كانت $\text{س} < ١$ لان الباقى الاول يساوى حاصل ضرب الكميتين

$$\frac{\text{ح}\text{س}}{١}\times\frac{(\text{ح}-١)\text{س}}{٢}\times\frac{(\text{ح}-٢)\text{س}}{٣}\times\cdots\times\frac{(\text{ح}-\text{ن}+١)\text{س}}{\text{ن}}\quad\text{و}\quad\frac{(١+\text{ة}\text{س})^{\text{ح}}}{(١+\text{ة}\text{س})^{\text{ن}}}$$

وحيث ان العامل الاخير من الكمية الاولى وهو

$$\frac{(\text{ح}-\text{ن}+١)\text{س}}{\text{ن}}\quad\text{او}\quad\frac{(\text{ح}+١)\text{س}}{\text{ن}}-\text{س}$$

يقرب من $-\text{س}$ كلما كبر ن فتكون الكمية المذكورة حينئذ اصغر من الواحد ويقرب حاصل الضرب الاول من الصفر كلما ازداد ن ويجعل $\text{ة}=٠$ ثم $\text{ة}=١$ فى الكمية الثانية وهى $\frac{(١+\text{ة}\text{س})^{\text{ح}}}{(١+\text{ة}\text{س})^{\text{ن}}}$ المساوية $\frac{١}{(١+\text{س})^{\text{ن}-\text{ح}}}$ نرى انها قد صارت محصورة بين الواحد و $\frac{١}{(١+\text{س})^{\text{ن}-\text{ح}}}$

اعنى اقل من الواحد اذا كانت س موجبة فاذا يقرب الباقى ب من الصفر كلما زاد ن وتكون حينئذ $(1+س)^ح$ حاصل جمع المتسلسلة

واذا كانت س سالبة فلا يمكن الجزم بان الكمية $\frac{1}{(1+ة س)^{ن-ح}}$ التى

تؤول الى $\frac{1}{(1-ة ط)^{ن-ح}}$ بفرض س = ــ ط لاتصير لانهائية ولكن

باعتبار الباقى الثانى نرى ان المقدار

$$\frac{ح(ح-1)(ح-2)\cdots(ح-ن+1)}{(ن-1)!} س^ن$$

يقرب من الصفر كلما زاد ن وان الكمية

$$\left(\frac{1-ة}{1+ة ط}\right)^{ن-1} (1-ة ط)^{ح-1}$$

تصير منحصرة دائما بين الصفر والواحد لان ١ــة > ١ــة ط فيقرب الباقى ب من الصفر وينتج مما ذكر ان $(1+س)^ح$ يكون حاصل جمع المتسلسلة حينما تاخذ س اى مقدار من المقادير المحصورة بين ــ١ و +١

٢ نشر المتعاقات الاسية

٥١ • اذا فرض ان م (س) = $ح^س$ وان ح عدد حينما اتفق موجب نجد

$$م(س) = ح^س لع ح$$

$$م'(س) = ح^س لع^2 ح$$

$$م''(س) = ح^س لع^3 ح$$

- - - - - - - - - - - -

$$م^{ن-1}(س) = ح^س لع^{ن-1} ح$$

$$م^ن(س) = ح^س لع^ن ح$$

ومن هذا

$$م(0) = 1$$

$$م'(٠) = لع\ ح$$

$$م''(٠) = لع^{٢}\ ح$$

$$م'''(٠) = لع^{٣}\ ح$$

- - - - - - -

$$م^{ن-١}(٠) = لع^{ن-١}\ ح$$

$$م^{ن}(ثس) = ح^{ثس}\ لع^{ن}\ ح$$

فبموجب قانون ماكورا يحدث

$$ح^{س} = ١ + س\ لع\ ح + \frac{س^{٢}\ لع^{٢}\ ح}{٢!} + \frac{س^{٣}\ لع^{٣}\ ح}{٣!} + \cdots + \frac{س^{ن-١}\ لع^{ن-١}\ ح}{(ن-١)!}$$

$$+\ س^{ن}\ لع^{ن}\ ح\ .\ ح^{ثس}$$

ومن المعلوم (المطلب ٤٤) ان الكمية

$$\frac{س^{ن}\ لع^{ن}\ ح}{ن!}$$

تقرب من الصفر كلما زادت $ن$ وان للعامل $ح^{ثس}$ مقدارا محدودا فيقرب الباقي من الصفر ويكون حينئذ $ح^{س}$ هو حاصل جمع المتسلسلة

وان كان $ح = ه$ الذي منه $لع\ ح = ١$ يكون

$$ه^{س} = ١ + \frac{س}{١} + \frac{س^{٢}}{٢!} + \frac{س^{٣}}{٣!} + \cdots + \frac{س^{ن-١}}{(ن-١)!} + \frac{س^{ن}}{ن!}\ ه^{ثس}$$

وبجعل $س = ١$ يحدث القانون المعلوم

$$ه = ٢ + \frac{١}{٢!} + \frac{١}{٣!} + \frac{١}{٤!} + \cdots\cdots$$

٥٣ . نشر لغا $(١+س)$

٥٢ . اذا فرضنا ان $م(س) = لغا\ (١+س)$ نجد

$$\text{م}'(\text{س}) = \text{لو ه} \cdot (\text{١}\times\text{س})^{-\text{١}}$$

$$\text{م}''(\text{س}) = -\ \text{لو ه} \cdot (\text{١}+\text{س})^{-\text{٢}}$$

$$\text{م}'''(\text{س}) = \text{٢}\ \text{لو ه} \cdot (\text{١}+\text{س})^{-\text{٣}}$$

$$\text{م}''''(\text{س}) = -\ \text{٣}!\ \text{لو ه} \cdot (\text{١}+\text{س})^{-\text{٤}}$$

- - - - - - - - - - - - - - - -

$$\text{م}^{\text{ن}}(\text{س}) = \pm\ (\text{ن}-\text{١})!\ \text{لو ه} \cdot (\text{١}+\text{س})^{-\text{ن}}$$

ومن هنا

$$\text{م}(\text{٠}) = \text{٠}$$

$$\text{م}'(\text{٠}) = \text{لو ه}$$

$$\text{م}''(\text{٠}) = -\ \text{لو ه}$$

$$\text{م}'''(\text{٠}) = \text{٢}!\ \text{لو ه}$$

- - - - - - - - - - - - - -

$$\text{م}^{\text{ن}-\text{١}}(\text{٠}) = \mp\ (\text{ن}-\text{٢})!\ \text{لو ه}$$

$$\text{م}^{\text{ن}}(\text{ةس}) = \pm\ (\text{ن}-\text{١})!\ \frac{\text{لو ه}}{(\text{١}+\text{ةس})^{\text{ن}}}$$

وحينئذ يصير

$$\text{لو}(\text{١}+\text{س}) = \text{لو ه} \cdot \left(\text{س} - \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٢}} + \frac{\text{س}^{\text{٣}}}{\text{٣}} - \frac{\text{س}^{\text{٤}}}{\text{٤}} + \cdots \mp \frac{\text{س}^{\text{ن}-\text{١}}}{\text{ن}-\text{١}} + \text{ب}\right) \quad (\text{١})$$

و ب عبارة عن احدى الكميتين

$$\frac{\text{١}}{\text{ن}}\left(\frac{\text{س}}{\text{١}+\text{ةس}}\right)^{\text{ن}} \quad \text{أو} \quad \text{س}^{\text{ن}}\frac{(\text{١}-\text{ة})^{\text{ن}-\text{١}}}{(\text{١}+\text{ةس})^{\text{ن}}}$$

فاذا كانت س موجبة اقل من الواحد تقرب الكمية $\frac{\text{١}}{\text{ن}}\left(\frac{\text{س}}{\text{١}+\text{ةس}}\right)^{\text{ن}}$ من الصفر كلما زيد ن واذا انحصرت بين الصفر و −١ فالباقي الثاني يؤول بعد فرض ان س = − ط الى

$$\frac{\text{ط س}}{\text{١}-\text{ةس}}\left(\frac{\text{١}-\text{ة}}{\text{١}-\text{ةط}}\right)^{\text{ن}-\text{١}}$$

وحيث

وحيث ان ط < ١ فالعامل $ط^{ن}$ يقرب من الصفر وكذا حيث ان

١ − ق < ١ − ق ط تكون الكمية $\left(\frac{١-ق}{١-ق ط}\right)^{ن-١}$ اصغر من

الواحد فحينئذ اذا كانت س محصورة بين − ١ و + ١ تكون المتسلسلة غائية و يكون حاصل جمعها يساوى لما (١ + س) واذا وقعت خارج هاتين النهايتين تكون المتسلسلة غير غائية (مطلب ٤٠ المثال الاول)

٥٣ . اذا وضعنا − س بدلا من س فى القانون (١) من المطلب السابق نجد

$$لما\,(١-س) = -\,لما\,ه\,\left(س + \frac{س^{٢}}{٢} + \frac{س^{٣}}{٣} + \frac{س^{٤}}{٤} + ٠٠٠٠٠\right)$$

وبطرح هذا منه يحدث

$$لما\,\frac{١+س}{١-س} = ٢\,لما\,ه\,\left(س + \frac{س^{٢}}{١} + \frac{س^{٣}}{٣} + \frac{س^{٣}}{٤} + ٠٠٠٠٠٠\right)$$

واذا فرض ان $\frac{١+س}{١-س} = \frac{ن+ط}{ن}$ الذى ينتج منه $س = \frac{ط}{٢ن+ط}$

يؤل القانون الاخير الى

$$لما\,\frac{ن+ط}{ن} = لما\,(ن+ط) - لما\,ن = ٢\,لما\,ه$$

$$\left\{\frac{ط}{٢ن+ط} + \frac{ط^{٣}}{٣(٢ن+ط)^{٣}} + \frac{ط^{٥}}{٥(٢ن+ط)^{٥}} + ٠٠٠٠\right] \quad (٢)$$

و بفرض ان ط = ١ يكون

$$لما\,(ن+١) - لما\,ن = ٢\,لما\,ه\,\left[\frac{١}{٢ن+١} + \frac{١}{٣(٢ن+١)^{٣}}\right.$$

$$\left. + ٠٠٠٠٠٠٠\right]$$

فبواسطة هذا القانون يمكن حساب لوغاريتمات جميع الاعداد الصحيحة من ابتدا الواحد

و يمكن ايجاد قانون آخر أسهل فى الاستعمال وذلك بجعل

$$\frac{١+س}{١-س} = \frac{ن^{٢}}{ن^{٢}-١} \quad \text{الذى منه} \quad س = \frac{١}{٢ن^{٢}-١}$$

وبملاحظة ان لما $(ن^{٢} - ١)$ = لما (ن + ١) + لما (ن − ١) فيحدث

$$لما\,(ن+١) = ٢\,لما\,ن - لما\,(ن-١) - ٢\,لما\,ه$$

$$\left[\frac{١}{٢ن^{٢}-١}+\frac{١}{٣(٢ن^{٢}-١)^{٣}}+\frac{١}{٥(٢ن^{٢}-١)^{٥}}+\cdots\cdots\right] \quad (٣)$$

فبهذا القانون نجد لوغاريتم أي عدد صحيح بواسطة لوغاريتمي العددين المتقدمين عنه واليا

فاذا كانت $ن > ١٠٠$ مثلا يمكن أخذ الحد الاول فقط فنجد القانون المعد لحساب الفروق الجدولية المتتابعة وهو

$$\text{اما}(ن+١) - \text{اما}\ ن = \text{لعا}\ ن - \text{اما}(ن-١) = \frac{٢\ \text{لعا}\ ه}{٢ن^{٢}-١}$$

٥٤ • بواسطة القوانين السابقة يمكن ايجاد اللوغاريتمات مهما كان الاساس ولكن يلزم قبل تطبيقها معرفة اما ه ولاجل ذا نرمز بالحرف س

اما ه

للاساس فيكون س = ه وباخذ اللوغاريتمين النبريانيين يحدث

$$\text{اما}\ ه\ .\ \text{لع}\ س = ١ \quad \text{ومنه}\quad \text{اما}\ ه = \frac{١}{\text{لع}\ س}$$

فاذا افرضنا ان س = ١٠ مثلا نبحث أولا عن لوغاريتم ٢ النبرياني بواسطة القانون (٣) الذي يؤول اذا جعل فيه لع ه = ١ و ن = ١ الى

$$\text{لع}\ ٢ = ٢\left(\frac{١}{٣}+\frac{١}{٣\times ٣^{٣}}+\frac{١}{٥\times ٣^{٥}}+\cdots\cdots\right)$$

$$= ٠،٦٩٣١٤٧١٨٠$$

وبناء عليه يكون

$$\text{لع}\ ٤ = ٢\ \text{لع}\ ٢ = ١،٣٨٦٢٩٤٣٦٥$$

ثم اذا جعلنا في (٣) ن = ٤ نجد

$$\text{لع}\ ٥ = ٢\left(\frac{١}{٩}+\frac{١}{٣\times ٩^{٣}}+\frac{١}{٥\times ٩^{٥}}+\cdots\cdots\right)$$

$$= ١،٦٠٩٤٣٧٩١٣$$

واذا يكون

$$\text{لع}\ ١٠ = \text{لع}\ ٢ + \text{لع}\ ٥ = ٢،٣٠٢٥٨٥٠٩٣$$

ومنه

$$\text{لو هـ} = \frac{1}{\text{لع}\,10} = ٠٫٤٣٤٢٩٤٤٨٢$$

وهو المطلوب

٥٤ نشر بعض متعلقات دائرية

٥٥ ليكن م (س) = جا س فيكون

$$م'(س) = \text{جتا}\ س$$

$$م''(س) = -\text{جا}\ س$$

$$م'''(س) = -\text{جتا}\ س$$

$$م''''(س) = \text{جا}\ س$$

. . . .

ومنه

$$م(٠) = ٠$$

$$م'(٠) = ١$$

$$م''(٠) = ٠$$

$$م'''(٠) = -١$$

$$م''''(٠) = ٠$$

. . . . . .

ومن هنا يشاهد ان المشتقات ذات المراتب الزوجية معدومة وان التي تكون مراتبها فردية تساوي ± ١ فاذا فرضت ن فردية يحدث

$$\text{جا}\ س = س - \frac{س^{٣}}{٣!} + \frac{س^{٥}}{٥!} - \frac{س^{٧}}{٧!} + \cdots \mp \frac{س^{ن-١}}{(ن-٢)!}$$

$$\pm \frac{س^{ن}}{(ن-١)!}\ \text{جتا}\ ة\ س$$

وحيث ان مقدار جتا ة س المطلق هو دائماً أقل من الواحد فيقرب الباقي من الصفر وتكون المتسلسلة

$$\text{جا س} = \text{س} - \frac{\text{س}^{3}}{3!} + \frac{\text{س}^{5}}{5!} \cdots\cdots\cdots\cdots$$

غائية مهما فرضت س .

٥٦. ليكن م (س) = جتا س فيحدث

$$\text{م}'(\text{س}) = -\,\text{حا س}$$

$$\text{م}''(\text{س}) = -\,\text{جتا س}$$

$$\text{م}'''(\text{س}) = \text{حا س}$$

$$\text{م}''''(\text{س}) = \text{جتا س}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

ومنه

$$\text{م}(0) = 1$$

$$\text{م}'(0) = 0$$

$$\text{م}''(0) = -1$$

$$\text{م}'''(0) = 0$$

$$\text{م}''''(0) = 1$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

وبفرض ن عدداً زوجياً يصير

$$\text{جتا س} = 1 - \frac{\text{س}^{2}}{2!} + \frac{\text{س}^{4}}{4!} - \frac{\text{س}^{6}}{6!} + \frac{\text{س}^{8}}{8!} \cdots\cdots$$

$$\pm \frac{\text{س}^{\text{ن}-2}}{(\text{ن}-2)!} \mp \frac{\text{س}^{\text{ن}}}{\text{ن}!}\,\text{جتا ة س}$$

ويشاهد كما سبق انه مهما كانت س يكون

$$\text{جتا } س = 1 - \frac{س^2}{2!} + \frac{س^4}{4!} - \frac{س^6}{6!} + \cdots\cdots$$

٥٧. ليكن ص = قوطا س فنجد [مطالب[٢٧] تمرين ٢ (ج)] ان

$$\left(\frac{د^{ن+1}ص}{د س^{ن+1}}\right)_{س=0} = 0 \quad \text{اذا كانت ن فرضية}$$

$$\left(\frac{د^{ن+1}ص}{د س^{ن+1}}\right)_{س=0} = (-1)^{\frac{ن}{2}}\, ن! \quad \text{اذا كانت ن زوجية}$$

فاذا فرضنا على التوالى أن ن = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، .... يحدث

$$\left(\frac{دص}{دس}\right)_{س=0} = 1$$

$$\left(\frac{د^3ص}{دس^3}\right)_{س=0} = -2!$$

$$\left(\frac{د^5ص}{دس^5}\right)_{س=0} = 4!$$

$$\left(\frac{د^7ص}{دس^7}\right)_{س=0} = -6!$$

....

واذا وضعنا هذه المقادير فى قانون ماكوران ولاحظنا ان م (٠) = قوطا ٠ = ٠ وأن المشتقات ذات الرتبة الزوجية كلها معدومة ينتج

$$\text{قوطا } س = س - \frac{س^3}{3} + \frac{س^5}{5} - \frac{س^7}{7} + \cdots\cdots$$

بشرط ان $س > -1$ و $س < 1$ او $س = 1$ لان الباقى(١)

---

(١) وجدناه هذا الباقى بما قلناه فى التمرين الرابع (ب) (مطالب[٢٧])

وهو $ب = \pm \frac{س^{ن}}{ن} \cdot \frac{\text{جا}(ن\ \text{قوظا}\ س)}{(١+ن^{٢}س^{٢})^{\frac{ن}{٢}}}$ يقرب من الصفر كلما زاد ن

وبجعل س = ١ نجد

$$\frac{ط}{٤} = \frac{١}{١} - \frac{١}{٣} + \frac{١}{٥} - \frac{١}{٧} + \frac{١}{٩} \cdots\cdots$$

وهي صورة غاريقة لنسبة الدائرة إلى قطرها

(تمرينات)

١٠ انشر $م(س) = \text{جا}^{٢}\ س$ بموجب قانون ماكوران

الجواب

$$\text{جا}^{٢}\ س = \frac{١}{٢}\left[\frac{(٢س)^{٢}}{٢!} - \frac{(٢س)^{٤}}{٤!} + \frac{(٢س)^{٦}}{٦!} \cdots\cdots\right]$$ مهما

كانت س لأن الباقي هو

$$ب = -\frac{(٢س)^{ن}}{ن!} \cdot \frac{١}{٢}\ \text{جتا}\left(٢ث س + \frac{ن ط}{٢}\right)$$

٢٠ $م(س) = (\text{قوجا}\ س)^{٢}$

الجواب

$$(\text{قوجا}\ س)^{٢} = \frac{س^{٢}}{١} + \frac{٢}{٣}\cdot\frac{س^{٤}}{٢} + \frac{٢}{٣}\cdot\frac{٤}{٥}\cdot\frac{س^{٦}}{٣} + \frac{٢}{٣}\cdot\frac{٤}{٥}\cdot\frac{٦}{٧}\cdot\frac{س^{٨}}{٤}$$

$$+ \cdots\cdots$$

٣٠ انشر $م(س) = (س+ح)^{ن}$ بموجب قانون بيرنولي

الجواب

$$(س+ح)^{ن} = ح^{ن} + ن\ س\ (س+ح)^{ن-١} - \frac{ن(ن-١)}{٢!}س^{٢}$$

$$\times (س+ح)^{ن-٢} - \cdots\cdots$$

الباب العاشر

في العبارات التفضيلية

٥٨ · من المعلوم ان جذور المعادلات ذات الدرجة الثانية تاخذ في بعض الاحيان هذه الصورة $\text{ح} + \text{ء}\sqrt{-1}$ التي فيها ح و ء عددان كيفما اتفقا من جهة الايجاب والسلب و $\sqrt{-1}$ الذي ليس له قيمة معتبرة يفرض ان مربعه -1 · وكل ما جاء على هذه الصورة يسمى بالعبارة التخيلية

اذا امكن تحويل متعلقة م مثلا الى صورة تخيلية بطريقتين مختلفتين بحيث يكون مثلا

$$\text{م} = \text{ح} + \text{ء}\sqrt{-1} \quad \text{و} \quad \text{م} = \text{ح}' + \text{ء}'\sqrt{-1}$$

ينتج ضرورة ان

$$\text{ح} = \text{ح}' \quad \text{و} \quad \text{ء} = \text{ء}'$$

٥٩ · كل عبارة تخيلية $\text{ح} + \text{ء}\sqrt{-1}$ يمكن ان تاخذ الوضع

$$\text{غ}\left(\text{جتا ن} + \sqrt{-1}\ \text{حا ن}\right)$$

وهذا يحصل

$$\text{ح} = \text{غ جتا ن} \quad \text{و} \quad \text{ء} = \text{ع حا ن}$$

لانه ينتج من هاتين المعادلتين ان

$$\text{ع} = \sqrt{\text{ح}^2 + \text{ء}^2} \quad \text{و} \quad \text{جتا ن} = \frac{\text{ح}}{\sqrt{\text{ح}^2+\text{ء}^2}} \quad \text{و} \quad \text{حا ن} = \frac{\text{ء}}{\sqrt{\text{ح}^2+\text{ء}^2}} \quad \text{و} \quad \text{طا ن} = \frac{\text{ء}}{\text{ح}}$$

فالكمية ع التي هي موجبة دائما تسمى مقياسا والزاوية ن تسمى دليلا للعبارة التخيلية

وعادة ياخذ للزاوية ن اصغر قوس موجب من القانون $\text{طا ن} = \frac{\text{ء}}{\text{ح}}$

(قانون مواڤر)

انشر حا ع س و جتا ع س

٦٠ · اذا ضربت $\text{جتا س} + \sqrt{-1}\ \text{جا س}$ في $\text{جتا ص} + \sqrt{-1}\ \text{جا ص}$ يحدث

$$\text{جتا س جتا ص} - \text{جا س جا ص} + \sqrt{-1}\ (\text{جا س جا ص} + \text{جا ص جتا س})$$

وكما هو واضح

$$\text{جتا}\ (\text{س} + \text{ص}) + \sqrt{-1}\ \text{جا}\ (\text{س} + \text{ص})$$

فينتج انه يكفي لايجاد حاصل ضرب عبارتين تخيليتين من هذه الصورة $\text{جتا س} + \sqrt{-1}\ \text{جا س}$ ان نجمع الدالين ومثل المضروبين في هذا عدة مضاريب فان حاصل ضرب

$$(\text{جتا س} + \sqrt{-1}\ \text{جا س})\ (\text{جتا ص} + \sqrt{-1}\ \text{جا ص})\ (\text{جتا ط} + \sqrt{-1}\ \text{جا ط}) \ldots\ldots$$

$$= \text{جتا}\ (\text{س} + \text{ص} + \text{ط} + \ldots) + \sqrt{-1}\ \text{جا}\ (\text{س} + \text{ص} + \text{ط} + \ldots\ldots) \qquad (١)$$

واذا كانت المضاريب كلها متساوية وكان عددها ع نجد

$$(\text{جتا س} + \sqrt{-1}\ \text{جا س})^{\text{ع}} = \text{جتا ع س} + \sqrt{-1} \times \text{جا ع س} \qquad (٢)$$

وهذا هو المسمى بقانون موافر

واذا وضع فيه $-\sqrt{-1}$ موضع $\sqrt{-1}$ يحدث

$$(\text{جتا س} - \sqrt{-1}\ \text{جا س})^{\text{ع}} = \text{جتا ع س} - \sqrt{-1}\ \text{جا ع س}$$

ويمكن ايجاد الطرف الثاني من القانون آخذا صورة اخرى وذلك ببسط الطرف الاول على مقتضى قانون نيوتن فاننا نجد

$$(\text{جتا س} + \sqrt{-1}\ \text{جا س})^{\text{ع}} = \text{جتا}^{\text{ع}}\ \text{س} - \frac{\text{ع}(\text{ع}-١)}{٢!}\ \text{جتا}^{\text{ع}-٢}\ \text{س جا}^{٢}\ \text{س} + \frac{\text{ع}(\text{ع}-١)(\text{ع}-٢)(\text{ع}-٣)}{٤!}\ \text{جتا}^{\text{ع}-٤}\ \text{س جا}^{٤}\ \text{س} + \ldots$$

+

$$+\sqrt{-1}\,\Big[\text{ع}\,\text{جتا}^{\text{ع}-1}\text{س}\ \text{جا}\,\text{س}-\frac{\text{ع}(\text{ع}-1)(\text{ع}-2)}{3!}$$

$$\times\ \text{جتا}^{\text{ع}-3}\text{س}\ \text{جا}^{3}\text{س}+\cdots\Big]\quad(3)$$

فبواسطة (٢) و (٣) وما تقدم في مطلب ٥٨ يكون

$$\text{جتا}\,\text{ع}\,\text{س}=\text{جتا}^{\text{ع}}\text{س}-\frac{\text{ع}(\text{ع}-1)}{2!}\text{جتا}^{\text{ع}-2}\text{س}\ \text{جا}^{2}\text{س}+\frac{\text{ع}(\text{ع}-1)(\text{ع}-2)(\text{ع}-3)}{4!}$$

$$\times\ \text{جتا}^{\text{ع}-4}\text{س}\ \text{جا}^{4}\text{س}-\cdots\cdots$$

$$\text{جا}\,\text{ع}\,\text{س}=\text{ع}\,\text{جتا}^{\text{ع}-1}\text{س}\ \text{جا}\,\text{س}-\frac{\text{ع}(\text{ع}-1)(\text{ع}-2)}{3!}$$

$$\times\ \text{جتا}^{\text{ع}-3}\text{س}\ \text{جا}^{3}\text{س}+\cdots\cdots$$

(بسط $\text{جا}^{\text{ع}}\text{س}$ و $\text{جتا}^{\text{ع}}\text{س}$)

على حسب جيوب مكررات القوس س وجيوب متمماتها

٦١. لتكن المعادلتان

$$\text{و}=\text{جتا}\,\text{س}+\sqrt{-1}\ \text{جا}\,\text{س}\ ,\ \text{ى}=\text{جتا}\,\text{س}-\sqrt{-1}\ \text{جا}\,\text{س}$$

اللتان يحدثان

$$2\,\text{جتا}\,\text{س}=\text{و}+\text{ى}\ ,\ 2\sqrt{-1}\ \text{جا}\,\text{س}=\text{و}-\text{ى}$$

فيكون بموجب قانون نيوتن

$$2^{\text{ع}}\,\text{جتا}^{\text{ع}}\text{س}=(\text{و}+\text{ى})^{\text{ع}}=\text{و}^{\text{ع}}+\text{ع}\,\text{و}^{\text{ع}-1}\text{ى}+\frac{\text{ع}(\text{ع}-1)}{2!}\text{و}^{\text{ع}-2}\text{ى}^{2}+\cdots$$

$$+\frac{\text{ع}(\text{ع}-1)}{2!}\text{و}^{2}\text{ى}^{\text{ع}-2}+\text{ع}\,\text{و}\,\text{ى}^{\text{ع}-1}+\text{ى}^{\text{ع}}$$ ويكون أيضا

$$(\sqrt{-1})^{\text{ع}}\,\text{جا}^{\text{ع}}\text{س}=(\text{و}-\text{ى})^{\text{ع}}=\text{و}^{\text{ع}}-\text{ع}\,\text{و}^{\text{ع}-1}\text{ى}+\frac{\text{ع}(\text{ع}-1)}{2!}\text{و}^{\text{ع}-2}\text{ى}^{2}$$

$$-\cdots\pm\frac{\text{ع}(\text{ع}-1)}{2!}\text{و}^{2}\text{ى}^{\text{ع}-2}\mp\text{ع}\,\text{و}\,\text{ى}^{\text{ع}-1}\pm\text{ى}^{\text{ع}}$$

فاذا فرضت ء عددا زوجيا ينتج حد متوسط بجعل $ك = \frac{ء}{٢}$ في الحد العام

$$\frac{ء(ء-١)(ء-٢)(ء-٣)\cdots(ء-ك+١)}{ك!} و^{ء-ك} ں^{ك}$$

وهو

$$\frac{ء(ء-١)(ء-٢)\cdots(\frac{ء}{٢}-١)}{\frac{ء}{٢}!} و^{\frac{ء}{٢}} ں^{\frac{ء}{٢}}$$

وبضم الحدود ذات الابعاد المتساوية من الحدين المتطرفين في المعادلتين السابقتين ينتج

$$٢^{ء} جتا^{ء} س = (و^{ء}+ں^{ء}) + \frac{ء}{١}(و^{ء-٢}+ں^{ء-٢}) و ں + \frac{ء(ء-١)}{٢!} \times (و^{ء-٤}+ں^{ء-٤}) و ں + \cdots\cdots + \frac{ء(ء-١)(ء-٢)\cdots(\frac{ء}{٢}-١)}{\frac{ء}{٢}!} و^{\frac{ء}{٢}} ں^{\frac{ء}{٢}}$$

$$٢^{ء}(-١)^{\frac{ء}{٢}} جا^{ء} س = (و^{ء}+ں^{ء}) - \frac{ء}{١}(و^{ء-٢}+ں^{ء-٢}) و ں + \frac{ء(ء-١)}{٢!}(و^{ء-٤}+ں^{ء-٤}) و^{٢} ں^{٢} \cdots\cdots \pm \frac{ء(ء-١)(ء-٢)\cdots(\frac{ء}{٢}+١)}{\frac{ء}{٢}!} و^{\frac{ء}{٢}} ں^{\frac{ء}{٢}}$$

وحيث ان $و ں = ١$ و $و^{ك} = جتا ك س + \sqrt{-١} جا ك س$ و $ں^{ك} = جتا ك س - \sqrt{-١} جا ك س$ واذا $و^{ك} + ں^{ك} = ٢ جتا ك س$ تؤول المعادلتان السابقتان بعد القسمة على ٢ الى

$$٢^{ء-١} جتا^{ء} س = جتا ء س + ء جتا (ء-٢) س + \frac{ء(ء-١)}{٢!} \times جتا (ء-٤) س + \cdots\cdots + \frac{١}{٢} \frac{ء(ء-١)\cdots(\frac{ء}{٢}+١)}{\frac{ء}{٢}!}$$

$$(-١)^{\frac{ء}{٢}} ٢^{ء-١} جا^{ء} س = جتا ء س - ء جتا (ء-٢) س$$

+

$$+ \frac{ع(ع-1)}{2!}\,\text{جتا}\,(ع-4)\,س - \cdots\cdots$$

$$\pm \frac{1}{2}\,\frac{ع(ع-1)(ع-2)\cdots(\frac{ع}{2}+1)}{\frac{ع}{2}!}$$

أما اذا فرضت ع عددا فرديا يكون عدد الحدود زوجيا ونجد الحدين المتوسطين بجعل $ه = \frac{ع-1}{2}$ و $ه = \frac{ع+1}{2}$ في الحد العام واذا ضمت الحدود ذات الابعاد المتساوية من الحدين المتطرفين ولوحظ ان

$$(\sqrt{-1})^{ع} = (-1)^{\frac{ع-1}{2}}\sqrt{-1}$$

ينتج

$$2^{ع}\,\text{جتا}^{ع}\,س = و^{ع} + ى^{ع} + ع\,(و^{ع-2}+ى^{ع-2})\,و\,ى + \frac{ع(ع-1)}{2!}$$

$$\times (و^{ع-4}+ى^{ع-4})\,و^{2}\,ى^{2} + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{ع(ع-1)\cdots\cdots\frac{ع+3}{2}}{\frac{ع-1}{2}!}\,(و+ى)\,و^{\frac{ع-1}{2}}\,ى^{\frac{ع-1}{2}}$$

$$(-1)^{\frac{ع-1}{2}}\,2^{ع}\,\text{جا}^{ع}\,س = (و^{ع}-ى^{ع}) - ع\,(و^{ع-2}-ى^{ع-2})\,و\,ى$$

$$+ \frac{ع(ع-2)}{2!}\,(و^{ع-4}-ى^{ع-4})\,و^{2}\,ى^{2} - \cdots\cdots$$

$$\pm \frac{ع(ع-1)\cdots\cdots\frac{ع+3}{2}}{\frac{ع-1}{2}!}\,(و-ى)\,و^{\frac{ع-1}{2}}\,ى^{\frac{ع-1}{2}}$$

وبقسمة هاتين المعادلتين على ٢ يحدث

$$2^{ع-1}\,\text{جتا}^{ع}\,س = \text{جتا}\,ع\,س + \frac{ع}{1}\,\text{جتا}\,(ع-2)\,س + \frac{ع(ع-1)}{2!}$$

$$\times\,\text{جتا}\,(ع-4)\,س + \cdots + \frac{ع(ع-1)\cdots\cdots\frac{ع+3}{2}}{\frac{ع-1}{2}!}\,\text{جتا}\,س$$

$$(-1)^{\frac{ع-1}{2}}\,2^{ع-1}\,\text{جا}^{ع}\,س = \text{جا}\,ع\,س - \frac{ع}{1}\,(ع-2)\,س + \frac{ع(ع-1)}{2!}$$

$$\times\ \text{جا}\,(ع-٤)\,س\ \cdots\ \pm\ \frac{ع(ع-١)\cdots\frac{ع+٣}{٢}}{\frac{ع-١١}{٢}!}\ \text{جا}\,س$$

(في حل المعادلة ذات الحدين)

٦٢ . اذا فرضت المعادلة $ص^{ع} = \pm ح$ وفرضت ح كمية موجبة ثم أريد ايجاد جميع مقادير المجهول ص الحقيقية والتخيلية نرمز بالحرف غ لجذر ح العيني العددي أعني $غ = \sqrt[ع]{ح}$ ثم نضع $ص = غ\,س$ بفرض س مجهولا جديدا فتؤول المعادلة المفروضة الى $غ^{ع} س^{ع} = \pm ١$

وحيث ان $ع^{ع} = ح$ يكون $س^{ع} = \pm ١$

لنعتبر أولا المعادلة $س^{ع} = ١$ التي ينتج منها $س = \sqrt[ع]{١}$ فاذا جعلنا $س = \frac{٢\,ق\,ط}{ع}$ المفروض فيه ق عددا صحيحا يحدث منه

$ع\,س = ٢\,ق\,ط$ و $\text{جتا}\,ع\,س = ١$ و $\text{جا}\,ع\,س = ٠$

واذا وضعت هذه المقادير في القانون

$$(\text{جتا}\,س + \sqrt{-١}\ \text{جا}\,س)^{ع} = \text{جتا}\,ع\,س + \sqrt{-١}\ \text{جا}\,ع\,س$$

يكون $(\text{جتا}\frac{٢\,ق\,ط}{ع} + \sqrt{-١}\ \text{جا}\frac{٢\,ق\,ط}{ع})^{ع} = ١$

ومنه $(\text{جتا}\frac{٢\,ق\,ط}{ع} + \sqrt{-١}\ \text{جا}\frac{٢\,ق\,ط}{ع})^{ع} = س^{ع}$

فاذا يصير $س = \text{جتا}\frac{٢\,ق\,ط}{ع} + \sqrt{-١}\ \text{جا}\frac{٢\,ق\,ط}{ع}$ (١)

واذا فرض على التوالي ان ق = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، .... ، ع − ١ يأخذ القوس $\frac{٢\,ق\,ط}{ع}$ مقادير مختلفة عددها ع وكل واحد منها أقل من ٢ ط وحيث انه لا يمكن ان يكون لقوسين منها جيب وجيب متمم متماثلان فتحدث حينئذ جذور المجهول التي عددها ع

واذا جعل للكمية ق مقادير أكبر من ع حدثت الجذور السابقة بعينها لانه لو فرض ان ق = ح ع + ق الذي فيه ح عدد صحيح وان نون

> ء بحاث $\frac{\text{ط ۲ ك}}{\text{ء}} = \text{۲ ح ك} + \frac{\text{ط ۲ ك}}{\text{ء}}$

ويكون

جتا $\frac{\text{ط ۲ ك}}{\text{ء}}$ = جتا $\frac{\text{ط ۲ ك}}{\text{ء}}$ و جا $\frac{\text{ط ۲ ك}}{\text{ء}}$ = جا $\frac{\text{ط ۲ ك}}{\text{ء}}$

أعني أن مقدار س الناتج بفرض أن ط يساوى مكرر ء زائدا عددا

مثل ط هو عين المقدار الناتج بفرض ان ط = ط

فينتج من هذا انه يمكن بواسطة لقانون السابق ايجاد جميع جذور المعادلة

سَ^ء − ۱ = ۰ حقيقية كانت وتخيلية

لنضع فى القانون (۱) ء = ط عوضا عن ط نجد

س = جتا $\frac{\text{ط ك}}{\text{ء}}$ ± $\sqrt{-1}$ جا $\frac{\text{ط ك}}{\text{ء}}$

فاذا يمكن ايجاد مقادير س بجعل ط = ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ..... ، $\frac{\text{ء}}{\text{۲}}$

او $\frac{\text{ء}-\text{۱}}{\text{۲}}$ (على حسب كون ء زوجية أو فردية) فى القانون

س = جتا $\frac{\text{ط ۲ ك}}{\text{ء}}$ ± $\sqrt{-1}$ جا $\frac{\text{ط ۲ ك}}{\text{ء}}$

واعتبر المعادلة سَ^ء = − ۱ فبفرض س = $\frac{\text{(۲ط + ۱) ك}}{\text{ء}}$ يكون

جتا ء س = − ۱ و جا ء س = ۰ ومن ثمة

[جتا $\frac{\text{(۲ط + ۱) ك}}{\text{ء}}$ + $\sqrt{-1}$ جا $\frac{\text{(۲ط + ۱) ك}}{\text{ء}}$]^ء = − ۱

واذا يكون

س = جتا $\frac{\text{(۲ط + ۱) ك}}{\text{ء}}$ + $\sqrt{-1}$ جا $\frac{\text{(۲ط + ۱) ك}}{\text{ء}}$

فيمكن بجعل ط = ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ... ء − ۱ فى هذ

القانون ايجاد جميع جذور المعادلة سَ^ء + ۱ = ۰ حقيقية كانت

أو تخيلية

واذا وضعنا فيه ء − (ط + ۱) بدلا عن ط يحدث

$$\text{س} = \text{جتا}\frac{(٢ق+١)ط}{ع} - \sqrt{-١}\ \text{جا}\frac{(٢ق+١)ط}{ع}$$

فاذا يمكن أيضا ايجاد المقادير المذكورة بجعل $ق = ٠ ، ١ ، ٢ ، \ldots ، \frac{ع}{٢}$ او $\frac{ع-١}{٢}$ (على حسب كون ع زوجية أو فردية) في القانون

$$\text{س} = \text{جتا}\frac{(٢ق+١)ط}{ع} \pm \sqrt{-١}\ \text{جا}\frac{(٢ق+١)ط}{ع}$$

(في معرفة مقداري جا س و جتا س بواسطة)

(الكمية الاسية التخيلية)

٦٢ - لنرجع الى المتسلسلة

$$ه^{س} = ١ + س + \frac{س^{٢}}{٢!} + \frac{س^{٣}}{٣!} + \frac{س^{٤}}{٤!} + \ldots\ldots$$

ونفرض انها تتحقق أيضا اذا وضع فيها $س\sqrt{-١}$ بدلا عن س فيحدث

$$ه^{س\sqrt{-١}} = ١ - \frac{س^{٢}}{٢!} + \frac{س^{٤}}{٤!} - \frac{س^{٦}}{٦!} + \ldots + \sqrt{-١}$$

$$\times \left(س - \frac{س^{٣}}{٣!} + \frac{س^{٥}}{٥!} - \frac{س^{٧}}{٧!} + \ldots \right)$$

وحيث ان الجزء الحقيقي من الطرف الثاني يساوي جتا س ومكرر $\sqrt{-١}$ يساوي جا س يكون

$$ه^{س\sqrt{-١}} = \text{جتا}\ س + \sqrt{-١}\ \text{جا}\ س$$

وبتغيير علامة $\sqrt{-١}$ يحدث

$$ه^{-س\sqrt{-١}} = \text{جتا}\ س - \sqrt{-١}\ \text{جا}\ س$$

ومنهما

ومنه ما يحدث

$$\text{جتا}\,س = \frac{\text{ه}^{س\sqrt{-1}} + \text{ه}^{-س\sqrt{-1}}}{٢}$$

$$\text{حا}\,س = \frac{\text{ه}^{س\sqrt{-1}} - \text{ه}^{-س\sqrt{-1}}}{٢}$$

وهو المطلوب

٦٤ . من المعلوم انه اذا كان س و ص كميتين حقيقيتين يكون

$$\text{ه}^{س} \times \text{ه}^{ص} = \text{ه}^{س+ص}$$

فهذا الارتباط يتحقق ايضا اذا وضع $س\sqrt{-1}$ و $ص\sqrt{-1}$ بدلا عن س و ص لانه من القانون (١) ينتج

$$\text{ه}^{س\sqrt{-1}} = \text{جتا}\,س + \sqrt{-1}\,\text{حا}\,س$$

$$\text{ه}^{ص\sqrt{-1}} = \text{جتا}\,ص + \sqrt{-1}\,\text{حا}\,ص$$

واذا يكون

$$\text{ه}^{س\sqrt{-1}} \times \text{ه}^{ص\sqrt{-1}} = \text{جتا}\,(س+ص) + \sqrt{-1}\,\text{حا}\,(س+ص)$$

$$= \text{ه}^{(س+ص)\sqrt{-1}}$$

أعني ان خواص المتعلقة ه تبقى بدون تغير سواء كانت س حقيقية او تخيلية

(في اللوغاريتمات التخيلية)

٦٥ . اذ فرض ان

$$و + ن\sqrt{-١}$$

$$ه^{س+ص\sqrt{-١}} =$$

وتسمى و + ن $\sqrt{-١}$ لوغاريتم س + ص $\sqrt{-١}$ النبرياني فاذا جعلنا

$$س = ع جتا ه \quad و \quad ص = ع جا ه$$

مع الفرض بان ع عدد موجب والزاوية ه محصورة بين − ق و + ق يمكن وضع س + ص $\sqrt{-١}$ على هذه الصورة

$$ع (جتا ه + \sqrt{-١} جا ه) = ع ه^{ه\sqrt{-١}}$$

فالمعادلة المفروضة تصير

$$ه^{و} (جتا ن + \sqrt{-١} جا ن) = ع (جتا ه + \sqrt{-١} جا ه)$$

ومن هنا $ه^{و}$ جتا ن = ع جتا ه , $ه^{و}$ جا ن = ع جا ه

فيكون $ه^{و}$ = ع او و = لو ع

وينتج ان

$$ن = ه + ٢ ك ق$$

بفرض ك عدد صحيحا غير معين

وعما سبق يؤخذ ان الكمية المتعلقة بتخيلية مثل $ط = ع ه^{ه\sqrt{-١}}$ لوغاريتمات نبريانية لا حصر لعددها وتستخرج بواسطة القانون

$$لو ط = لو ع + (ه + ٢ ك ق)\sqrt{-١}$$

فاذا فرض ان ك = ٠ نجد

$$لو ط = لو ع + ه\sqrt{-١}$$

وهذا

وهذا المقدار هو الذى سماه الرياضى كوشى مقدار ا ع ط الاصلى

الباب الحادى عشر

(فى النهايات الكبرى والصغرى للمتعلقات الظاهرة)

تنبيه واحدة

٦٦ • اذا فرضت المتعلقة م (س) وفرض ان س تاخذ جميع المقادير التى بها تبقى هذه المتعلقة حقيقية فالمقادير م (س) المتتابعة تارة تتصاعد وتارة تتنازل فالمقدار الذى تنتقل بعده من التصاعد الى التنازل فيسمى النهاية الكبرى والمقدار الذى تنتقل بعده من التنازل الى التصاعد يسمى نهاية صغرى

فالعلامة المميزة للنهاية الكبرى هى حينئذ كونها اكبر من المقادير السابقة عليها واللاحقة لها اوليا وعلامة النهاية الصغرى كونها أصغر

وبعبارة أخرى يقال عند أخذ س المقدار ح ان م (س) فى نهايتها الكبرى اذا كانت م (ح) اكبر من م (ح ± ء) مع فرض ان ء صغيرة بقدر ما يراد فالفرقان م (ح + ء) — م (ح) و م (ح — ء) — م (ء) يكونان حينئذ سالبين

ويقال ان م (س) فى نهايتها الصغرى اذا كانت م (ح) اصغر من م (ح ± ء) فالفرقان م (ح + ء) — م (ح) و م (ح — ء) — م (ح) يكونان موجبين

٦٧ • حيث علم (مطلب ١١) أن المتعلقة تتصاعد أو تتنازل على حسب كون المشتقة موجبة او سالبة ينتج انه بمرور س بالمقدار ح الذى به صارت المتعلقة فى نهايتها الكبرى تتغير علامة المشتقة من الايجاب الى السلب واذا كان ح هو المقدار الذى به تصير المتعلقة فى نهايتها الصغرى تتغير علامة المشتقة من السلب الى الايجاب

ولكن حيث لا يمكن ان تتغير علامة المتعلقة اذا لم تكن معدومة اولانهائية او غير مستمرة فمقادير المتغيرة الموافقة للنهاية الكبرى أو الصغرى تكون كذلك

محدودة أو لا نهائية أو غير مستمرة . والمعتبر الآن هي الحالة الاولى

٦٨ . لنفرض ان المشتقة الثانية مً (س) ليست لا نهائية ولا غير مستمرة فيما يقرب من المقدار ح فنجد على حسب قانون تيلور

$$\text{م}(\text{ح}+\text{ء}) - \text{م}(\text{ح}) = \text{ء}\ \text{مَ}(\text{ح}) + \frac{\text{ء}^2}{1.2}\ \text{مً}(\text{ح}+\text{ث}\,\text{ء}) \quad (١)$$

١١

ولكن اذا لم تنعدم مَ (س) يمكن ان تؤخذ ء صغيرة صغرا كافيا (مطلب) لكي تكون علامة الطرف الثاني عين علامة الحد الاول أعني ء مَ (ح) فعلامة الفرق م (ح+ء) − م (ح) تتغير مع علامة ء فلا يوجد حينئذ للمتعلقة م (س) نهاية كبرى ولا صغرى فينبغي في الحالتين ان تكون مَ (ح) = ٠ وينتج من هذا ان مقادير س التي بها تصير م (س) في نهاية كبرى أو صغرى لا توجد الا بين جذور المعادلة مَ (س) = ٠ فتؤول المسئلة حينئذ الى حل المعادلة المذكورة بالنسبة للمجهول س ويؤول القانون (١) الى

$$\text{م}(\text{ح}+\text{ء}) - \text{م}(\text{ح}) = \frac{\text{ء}^2}{1.2}\ \text{مً}(\text{ح}+\text{ث}\,\text{ء})$$

فاذا نسب للكمية ء مقادير صغيرة موجبة او سالبة تكون علامة الطرف الثاني عين علامة مً (ح) واذا لا تتغير علامة الفرق م (ح+ء) − م (ح) بتغير علامة ء وتكون حينئذ م (س) في نهاية كبرى أو صغرى على حسب كون المشتقة الثانية مً (ح) سالبة أو موجبة واذا فرضت مً (ح) = ٠ يكون

$$\text{م}(\text{ح}+\text{ء}) - \text{م}(\text{ح}) = \frac{\text{ء}^3}{1.2.3}\ \text{م}'''(\text{ح}) + \frac{\text{ء}^4}{1.2.3.4}\ \text{م}''''(\text{ح}+\text{ث}\,\text{ء})$$

فيرى ان الحد الاول من الطرف الثاني تتغير علامته مع تغير علامة ء فاذا

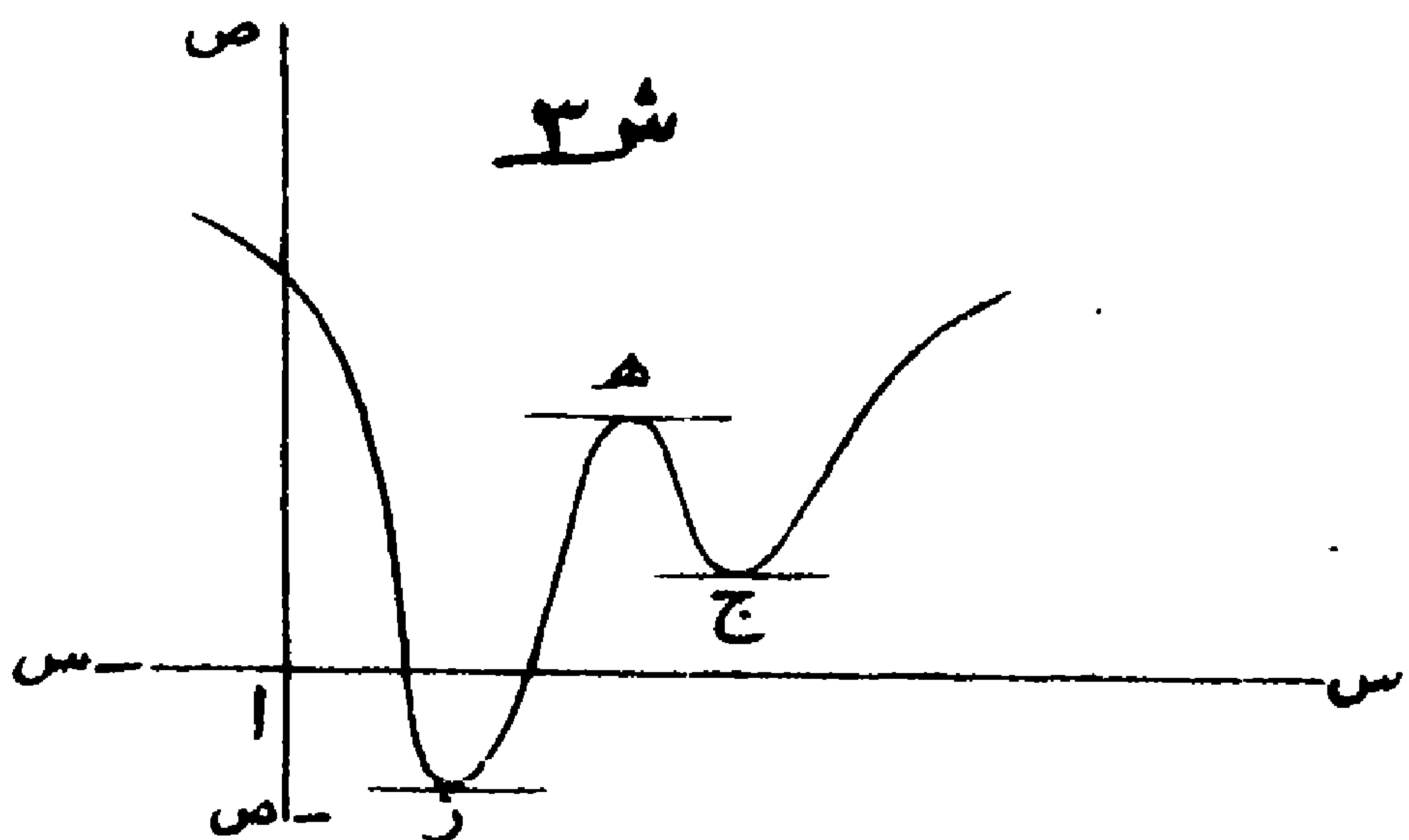
كانت المشتقة الثالثة $م'''(ح)$ ليست معدومة تتغير علامة الفرق $م(ح+ء) - م(ح)$ بتغير علامة ء فلا يوجد حينئذ للمتعلقة $م(س)$ نهاية كبرى ولا صغرى وأما اذا فرضت $م'''(ح) = ٠$ فتؤول المعادلة السابقة الى

$$م(ح+ء) - م(ح) = \frac{ء^٤}{١٤} م''''(ح+ثء)$$

ويرى كما تقدم انه اذا كانت $م''''(ح)$ ليست معدومة فتكون $م(س)$ في نهاية كبرى اذا كانت $م''''(ح) < ٠$ وفي نهاية صغرى اذا كانت $م''''(ح) > ٠$

وبهذه الطريقة يحكم انه اذا كانت $م^{ن}(س)$ هي أول مشتقة من المشتقات المتتابعة $م'(س)$ ، $م''(س)$ ... لا تنعدم بفرض ان $س = ح$ فلا يكون للمتعلقة $م(ح)$ لا نهاية كبرى ولا صغرى اذا كانت ن فردية واذا كانت زوجية تكون $م(س)$ في نهاية كبرى أو صغرى على حسب كون $م^{ن}(ح)$ سالبة أو موجبة

ولزيادة ايضاح ما تقدم نرسم المنحنى المبين بالمعادلة $ص = م(س)$ بالنسبة لمحورين متعامدين (شـ ٣) فضرورة نهايات $م(س)$ الكبرى والصغرى تكون مرتبات النقط ج ، هـ ، ز التي فيها المماس للمنحنى موازٍ لمحور السينات ومعيناتها تكون جذور المعادلة $م'(س) = ٠$ (مطلب ٨)



وغير ذلك حيث ان المشتقة تتنازل كلما زادت س حالة كونها قريبة من نهاية كبرى فتكون ضرورة مشتقة م َ (س) وهى م ً (س) سالبة فى تلك النقط وبالعكس فى اقرب من نهاية صغرى تتصاعد م َ (س) بزيادة س واذا تكون م ً (س) موجبة

(تطبيقات)

١ · لتكن م (س) = س^{٢} − ٢ ح س جتا هـ + ح^{٢} فنجد

م َ (س) = ٢ س − ٢ ح جتا هـ

م ً (س) = ٢

فى المعادلة م َ (س) = ٠ يعنى ٢ س − ٢ ح جتا هـ = ٠ يحدث س = ح جتا هـ وبوضع هذا المقدار فى المعادلة المفروضة نجد ح^{٢} جا^{٢} هـ وهى نهاية صغرى لان م ً > ٠

٢ لتكن م (س) = $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{س} - \text{ح}}$ فيكون

م َ (س) = $\frac{\text{س}(\text{س} - ٢\text{ح})}{(\text{س} - \text{ح})^{٢}}$ م ً (س) = $\frac{٢\text{ح}^{٢}}{(\text{س} - \text{ح})^{٣}}$

فمن م َ (س) = ٠ ينتج س = ٠ و س = ٢ ح وبوضع هذين المقدارين فى م (س) يحدث

م ً (٠) = − $\frac{٢}{\text{ح}}$ ، م ً (٢ح) = $\frac{٢}{\text{ح}}$

فالمشتقة المفروضة نهاية كبرى مساوية لصفر ونهاية صغرى تعادل ٤ ح

٣ · (مسئلة) ما المخروط الاكبر حجما المرسوم داخل كرة معلومة

ليكن نق نصف قطر الكرة و ص نصف قطر قاعدة المخروط و س ارتفاعه فمن المعلوم ان حجم المخروط

ح = $\frac{١}{٣}$ ط س ص^{٢}

وحيث

وحيث ان $ص^2 = س\,(2\,نق - س)$

يكون $ح = \frac{1}{3}\,ط\,س^2\,(2\,نق - س)$

وباخذ المشتقة يحدث

$ح' = \frac{4}{3}\,نق\,س - س^2 = 0$

ومنه $س = \frac{4}{3}\,نق$ ومنه $ص = \frac{2}{3}\sqrt{2}\,نق$

وحيث ان المشتقة الثانية هى

$ح'' = -\frac{4}{3}\,نق$

فحجم المخروط المطلوب يكون

$ح = \frac{32}{81}\,ط\,نق^3$

ويرى ان نسبته لحجم الكرة تساوى $\frac{8}{17}$.

(تمرينات)

المطلوب النهايات الكبرى والصغرى المتعلقة م (س) فى

١ . $م(س) = س^5 - 75\,س^3 + 1620\,س - 1000$

الجواب:
- $س = -6$ نهاية كبرى $م(-6) = -2296$
- $س = -3$ نهاية صغرى $م(-3) = -3078$
- $س = 3$ نهاية كبرى $م(3) = 1080$
- $س = 6$ نهاية صغرى $م(6) = 296$

٢ . $م(س) = هـ^{س} - 2\,جتا\,س + هـ^{-س}$ الجواب $س = 0$

نهاية صغرى $م(0) = 0$

٣ . ما المستطيل الاكبر سطحا المرسوم داخل قطع ناقص

(الجواب) هو ما كانت قاعدته $ح\sqrt{2}$ وارتفاعه $ء\sqrt{2}$

يفرض ان معادلة القطع الناقص هى

$ح^2\,ص^2 + ء^2\,س^2 = ح^2\,ء^2$

فالسطح المذكور يكون ٢ ح د .

(فى النهايات الكبرى والصغرى للمتعادلات المضمرة)

(بمتغيرة واحدة)

٠٦٩ لتكن م (س ، ص) = ٠ المفروض فيها ان ص متعلقة بالمستقلة س فبمقتضى ماقلناه فى مطلب ٦٩ تأخذ مشتقة هذه المتعلقة وتساويها بالصفر فيحدث

$$\frac{\left(\frac{\text{د م}}{\text{د س}}\right)}{\left(\frac{\text{د م}}{\text{د ص}}\right)} = ٠$$

ثم تحل المعادلتين السابقتين بالنسبة الى س و ص ونضع مقاديرهما فى المشتقة الثانية فنحكم بوجود نهاية كبرى أو صغرى على حسب كون المشتقة الثانية المذكورة سالبة أو موجبة

لتكن مثلا المعادلة

$$\text{ص}^{٢} - \text{س ص} + \text{س}^{٢} - ١ = ٠$$

فالمشتقة الاولى تكون

$$(٢\text{ص} - \text{س})\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} - \text{ص} + ٢\text{س} = ٠$$

والثانية

$$(٢\text{ص} - \text{س})\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}} + ٢\left(\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right)^{٢} - ٢\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} + ٢ = ٠ \quad (١)$$

فن الشرط $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٠$ يحدث ص = ٢ س وبوضع هذا المقدار فى المفروضة ينتج

$$\text{س} = \pm \frac{١}{\sqrt{٣}} \quad \text{ومنها ص} = \pm \frac{٢}{\sqrt{٣}}$$

وحيث ان $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٠$ تؤول المعادلة (١) الى

$$(٢\text{ص} - \text{س})\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}} + ٢ = ٠$$

ويتغيير س و ص بما ساواهما يكون

$$\frac{\text{ء}^{2}\text{ص}}{\text{ءس}^{2}} = \mp \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

٧٠. لنفرض ان المتعلقة ء المطلوب تعيين نهاياتها تكون مرتبطة بعدة متعلقات مثلا باثنتين وهما ص و ط وان يكون

$$\text{م}\,(\text{س، ص، ط، ء}) = 0 \qquad \text{م}_{1}\,(\text{س، ص، ط، ء}) = 0$$

$$\text{م}_{2}\,(\text{س، ص، ط، ء}) = 0 \qquad (1)$$

فاذا امكن محو ص و ط من اثنتين من هذه المعادلات تنتج معادلة مثل ع (س، ء) = ٠ ويؤول الامر الى ما ذكر في المطلب السابق والا ناخذ مشتقات المعادلات (١) بفرض ان ص و ط و ء متعلقات بالمستقلة س فيحدث

$$\frac{\text{ءم}}{\text{ءس}} + \frac{\text{ءم}}{\text{ءص}}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + \frac{\text{ءم}}{\text{ءط}}\,\frac{\text{ءط}}{\text{ءس}} + \frac{\text{ءم}}{\text{ءء}}\,\frac{\text{ءء}}{\text{ءس}} = 0$$

$$\frac{\text{ءم}_{1}}{\text{ءس}} + \frac{\text{ءم}_{1}}{\text{ءص}}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + \frac{\text{ءم}_{1}}{\text{ءط}}\,\frac{\text{ءط}}{\text{ءس}} + \frac{\text{ءم}_{1}}{\text{ءء}}\,\frac{\text{ءء}}{\text{ءس}} = 0$$

$$\frac{\text{ءم}_{2}}{\text{ءس}} + \frac{\text{ءم}_{2}}{\text{ءص}}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + \frac{\text{ءم}_{2}}{\text{ءط}}\,\frac{\text{ءط}}{\text{ءس}} + \frac{\text{ءم}_{2}}{\text{ءء}}\,\frac{\text{ءء}}{\text{ءس}} = 0$$

ونمحو $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ و $\frac{\text{ءط}}{\text{ءس}}$ منها نجد مقدار $\frac{\text{ءء}}{\text{ءس}}$ فنساويه للصفر ونجري العمل كما تقدم او نجعل في هذه المعادلات $\frac{\text{ءء}}{\text{ءس}} = 0$ فيحدث

$$\frac{\text{ءم}}{\text{ءس}} + \frac{\text{ءم}}{\text{ءص}}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + \frac{\text{ءم}}{\text{ءط}}\,\frac{\text{ءط}}{\text{ءس}} = 0$$

$$\frac{\text{ءم}_{1}}{\text{ءس}} + \frac{\text{ءم}_{1}}{\text{ءص}}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + \frac{\text{ءم}_{1}}{\text{ءط}}\,\frac{\text{ءط}}{\text{ءس}} = 0$$

$$\frac{\text{ءم}_{2}}{\text{ءس}} + \frac{\text{ءم}_{2}}{\text{ءص}}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + \frac{\text{ءم}_{2}}{\text{ءط}}\,\frac{\text{ءط}}{\text{ءس}} = 0$$

ثم نمحو $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ و $\frac{\text{ءط}}{\text{ءس}}$ فنجد معادلة بين س، ص، ط، ء فيستخرج منها

ومن المعادلات (١) مقادير هذه المجاهيل وبوضعها في المشتقة الثانية $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ع}}{\text{ءس}^{٢}}$ يحكم بنوع النهاية

لتكن مثلا المتعلقة ط والمعادلتان

$$\text{س} + \text{ص} + \text{ط} = ٦$$

$$\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} + \text{ط}^{٢} = ١٢$$

فنجد

$$\left.\begin{array}{l} ١ + \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + \frac{\text{ءط}}{\text{ءس}} = ٠ \\ ١ + \text{ص}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + \text{ط}\frac{\text{ءط}}{\text{ءس}} = ٠ \end{array}\right\} (١)$$

وبجعل $\frac{\text{ءط}}{\text{ءس}} = ٠$ يحدث

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -١ \text{ ، } \text{س} = \text{ص}$$

فمن المعادلات

$$\text{س} + \text{ص} + \text{ط} = ٦$$

$$\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} + \text{ط}^{٢} = ١٢$$

$$\text{س} = \text{ص}$$

يستخرج $\text{س} = ٣ \text{ ، } \text{ص} = ٢ \text{ ، } \text{ط} = ٢$

واذا أخذنا مشتقى المعادلتين (١) نجد المشتقة الثانيه $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ط}}{\text{ءس}^{٢}}$ وبوضع المقادير السابقة فيها نراها سالبة فبهذه المقادير تكون ط في نهايتها الكبرى .

(تتمة للكميات الصغيرة)

٧١ . قد ذكرنا في المطلب ٦ ان الكمية الصغرى هي الكمية التي تقرب جدا من الصفر فاذا وجدت في مسألة واحدة عدة كميات من هذا النوع تنتخب منها واحدة وتقابل بها الباقية وحينئذ تسمى هذه الكمية بالكمية الاصلية وتسمى الكمية الصغرى ذات المرتبة الاولى كل كمية تكون نهاية نسبتها الى الاصلية عددا معينا والكمية الصغرى ذات المرتبة الثانية هي ما تكون نسبتها للاصلية كمية صغرى ذات المرتبة الاولى

وعلى

وعلى العموم نسمي الكمية الصغرى ذات المرتبة النونية الكمية التي تكون نسبتها الى الاصلية كمية صغرى ذات المرتبة ن — ١ فمثلا اذا كان التفاضل د س هو الكمية الاصلية وكانت ع كمية صغرى ذات المرتبة الاولى يكون

$$\text{نها}\ \frac{\text{ع}}{\text{د س}} = \text{ل} \qquad (\text{ل عدد معين})$$

$$\text{ومنه}\quad \text{ع} = \text{د س}\ (\text{ل} + \text{ة}) \qquad (\text{ة عدد صغير جدا})$$

وقياسا على ذلك تكون الزيادة ف ص المتعلقة ص المقابلة للزيادة الصغيرة د س من الكميات ذات المرتبة الاولى وكذا التفاضل د ص لان

$$\text{ف ص} = \text{د س}\ [\text{م}'(\text{س}) + \text{ة}]$$

$$\text{د ص} = \text{م}'(\text{س})\ \text{د س}$$

٨٢ · لنذكر نظريتين في الكميات المذكورة وهما

(الاولى) لا تتغير نهاية نسبة كميتين صغيرتين اذا تبدلتا بكميتين أخريين تقرب نسبتهما للاوليين من الواحد

لتكن مثلا ح و ء كميتين صغيرتين و حَ و ءَ كميتين صغيرتين أيضا حيث

$$\text{يكون}\quad \text{نها}\ \frac{\text{ح}'}{\text{ح}} = ١ \ ,\ \text{نها}\ \frac{\text{ء}'}{\text{ء}} = ١ \qquad (١)$$

$$\text{فنقول ان}\quad \text{نها}\ \frac{\text{ح}}{\text{ء}} = \text{نها}\ \frac{\text{ح}'}{\text{ء}'}$$

لان من المعادلتين (١) ينتج $\text{ح}' = \text{ح} + \text{ة}$ ؛ ومنه $\frac{\text{ح}'}{\text{ح}} = ١ + \frac{\text{ة}}{\text{ح}}$ بفرض ان $\frac{\text{ة}}{\text{ح}}$ تقرب جدا من الصفر كلما نقصت ح و حَ أو كما يقال بفرض ة كمية صغيرة بالنسبة الى ح وينتج أيضا $\frac{\text{ء}'}{\text{ء}} = ١ + \frac{\text{ة}'}{\text{ء}}$ فبقسمة هاتين المعادلتين يحدث

$$\frac{\text{ح}'}{\text{ء}'} \cdot \frac{\text{ء}}{\text{ح}} = \frac{١ + \frac{\text{ة}}{\text{ح}}}{١ + \frac{\text{ة}'}{\text{ء}}}$$

و باخذ النهايات يكون

$$\text{نها}\,\frac{ح}{ء} \times \text{نها}\,\frac{ء}{ح} = ١ \qquad \text{ومنها}\quad \text{نها}\,\frac{ح}{ء} = \text{نها}\,\frac{ح}{ء}$$

وهو المطلوب

ويمكن التعبير عن هذه النظرية بهذه الكيفية أيضا وهى

لا تتغير نهاية نسبة كميتين صغيرتين اذا استبدلتا بكميتين آخريين فرقهما عن الاوليين كميتان صغيرتان بالنسبة لكليتهما

مثاله قد علم ان $\text{نها}\,\frac{س}{\text{جا}س} = ١$ فاذا أريد ايجاد نهاية $\frac{\text{جا}س}{\text{جا}^{٢}\,٣س}$ مثلا يمكن

أخذ النسبة $\frac{س}{٩س^{٢}}$ بموجب النظرية السابقة فنجد

$$\text{نها}\,\frac{\text{جا}س}{\text{جا}^{٢}\,٣س} = \text{نها}\,\frac{س}{٩س^{٢}} = \infty$$

(الثانية) لا يتغير حاصل جمع كميات صغريات مهما كان عددها اذا استبدلت بكميات نسبتها للاول تقرب من الواحد

ليكن مثلا $ح_{١}$ و $ح_{٢}$ و $ح_{٣}$ .... $ح_{ن}$ كميات صغيرة جدا و $ء_{١}$ و $ء_{٢}$ و $ء_{٣}$ ..... $ء_{ن}$ كميات أخرى بشرط ان تكون

$$\text{نها}\,\frac{ح_{١}}{ء_{١}} = ١ ،\ \text{نها}\,\frac{ح_{٢}}{ء_{٢}} = ١ ،\ \text{نها}\,\frac{ح_{٣}}{ء_{٣}} = ١ \ldots\ldots \text{نها}\,\frac{ح_{ن}}{ء_{ن}} = ١ \qquad (١)$$

فاقول ان

$$\text{نها}\,(ح_{١} + ح_{٢} + ح_{٣} + \ldots\ldots + ح_{ن}) =$$
$$\text{نها}\,(ء_{١} + ء_{٢} + ء_{٣} + \ldots\ldots + ء_{ن})$$

لان من (١) ينتج

$$\frac{ح_{١}}{ء_{١}} = ١ + ة_{١} ،\ \frac{ح_{٢}}{ء_{٢}} = ١ + ة_{٢} \ldots\ldots \frac{ح_{ن}}{ء_{ن}} = ١ + ة_{ن}$$

ومنها

$ح_١ = ء_١ + ء_١ ق_١ ، ح_٢ = ء_٢ + ء_٢ ق_٢ \cdots ح_ن = ء_ن + ء_ن ق_ن$

بفرض ق١ ، ق٢ ... قن كميات صغيرة جدا فيحدث

$ح_١ + ح_٢ + ح_٣ + \cdots + ح_ن = ء_١ + ء_٢ + ء_٣$

$+ \cdots + ء_ن + ء_١ ق_١ + ء_٢ ق_٢ + \cdots + ء_ن ق_ن$

واذا رمزنا بالحرف ك لأكبر كمية من ق١ ق٢ ... قن يحدث

$$[(ح_١ + ح_٢ + \cdots + ح_ن) - (ء_١ + ء_٢ + \cdots + ء_ن)]$$
$$< ك (ء_١ + ء_٢ + \cdots + ء_ن)$$

وحيث ان نها ك = ٠ يكون نها ك $(ء_١ + ء_٢ + \cdots + ء_ن) = ٠$

ومنه

$$نها (ح_١ + ح_٢ + \cdots + ح_ن) = نها (ء_١ + ء_٢ + \cdots + ء_ن)$$

وهو المطلوب

الباب الثانى عشر

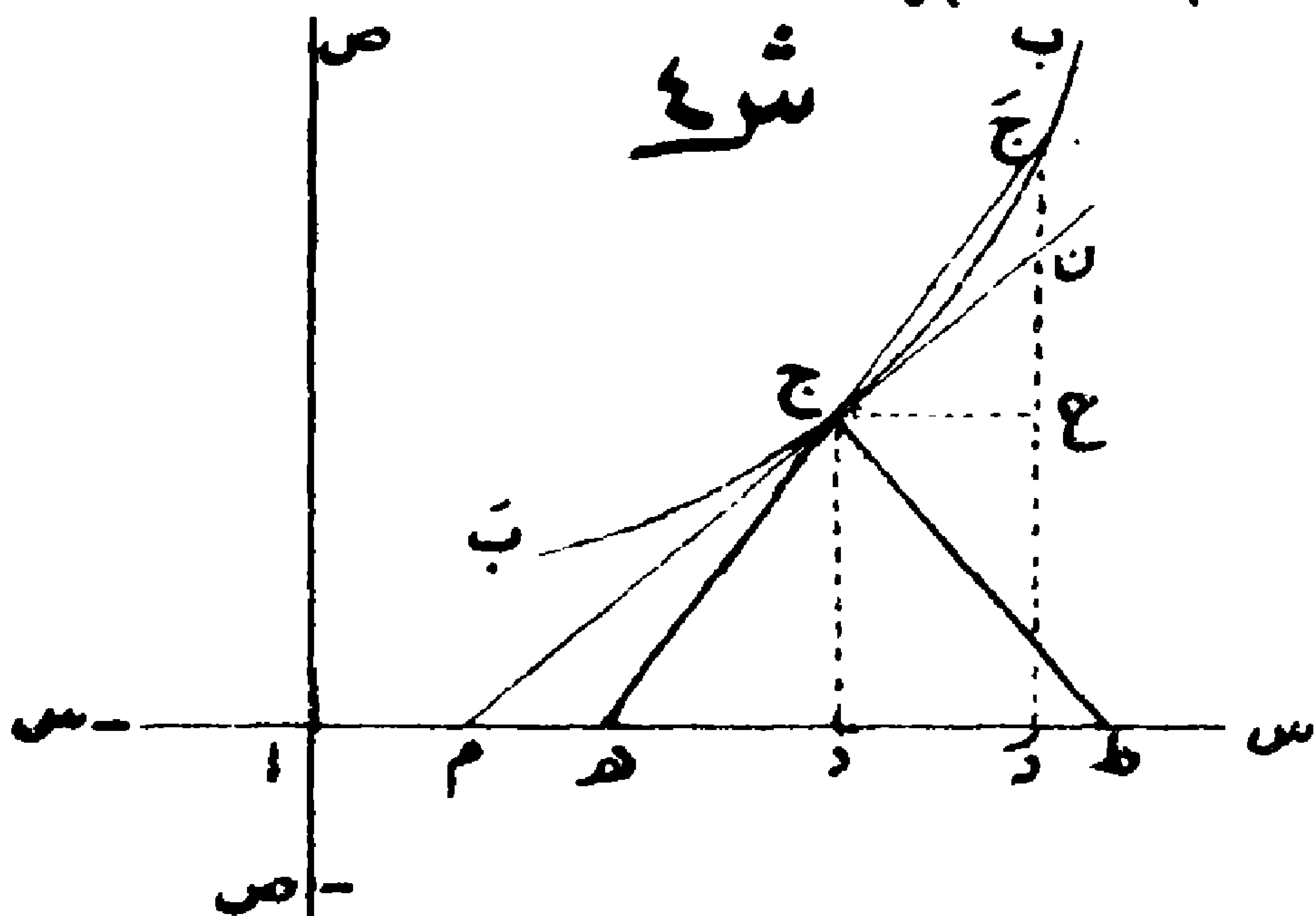
تطبيقات هندسية

فى معادلة المماس والعمود عليه

٧٣ · ليكن المنحنى ب ب (شكل ٤) المرسوم بالنسبة للمحورين المستقيمين اس ، اص ومبين بالمعادلة م (س ، ص) = ٠ فاذا أريد البحث عن معادلة المماس فى النقطة ج المعينة بالاحداثيين س ، ص نأخذ نقطة أخرى $\bar{ج}$ على المنحنى مجاورة للاولى ومعينة بالاحداثيين س + فس ، ص + فص فتكون فس ، فص عبارة عن الزيادتين ء $\bar{ء}$ ، $\bar{ج}$ ح الحادثتين فى ان واحد للاحداثيين س ، ص عند الانتقال من ج الى $\bar{ج}$ وتكون معادلة المستقيم ج $\bar{ج}$

$$\bar{ص} - ص = \frac{فص}{فس} (\bar{س} - س)$$

وحيث انه كلما قربت جَ من ج يدور الخط القاطع حول ج ويقرب من المماس من الذى هو نهايته



وتقرب النسبة $\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}}$ من نهايتها $\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}}$ فتصير حينئذ معادلة المماس

$$\text{صَ} - \text{ص} = \frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}} (\text{سَ} - \text{س})$$

ومقدار المكرر التفاضلى $\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}}$ يوجد بواسطة المعادلة م (س و ص) = ٠ لانه باخذ مشتقتها يحدث

$$\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}} = - \frac{\left(\frac{\text{ى م}}{\text{ى س}}\right)}{\left(\frac{\text{ى م}}{\text{ى ص}}\right)}$$

فتصير معادلة المماس

$$\text{صَ} - \text{ص} = - \frac{\left(\frac{\text{ى م}}{\text{ى س}}\right)}{\left(\frac{\text{ى م}}{\text{ى ص}}\right)} (\text{سَ} - \text{س})$$

ومنها $(\text{صَ} - \text{ص}) \frac{\text{ى م}}{\text{ى ص}} + (\text{سَ} - \text{س}) \frac{\text{ى م}}{\text{ى س}} = ٠$ (١)

٧٤ . ولنبحث الآن عن معادلة الخط ج ط العمود على المماس فى النقطة ج فنفرض ان المحورين متعامدان وحينئذ يمكن وضع المعادلة المطلوبة على هذه الصورة

$$ص - صَ = ك\,(سَ - س)$$

وحيث ان هذا الخط عمود على المماس فيكون كما هو معلوم فى الهندسة الجبرية

$$ك\,\frac{ءص}{ءس} = -1$$

ومن هنا

$$ك = -\frac{1}{\left(\frac{ءص}{ءس}\right)} = \frac{\left(\frac{ءم}{ءص}\right)}{\left(\frac{ءم}{ءس}\right)}$$

فالمعادلة السابقة تؤول الى

$$ص - صَ = \frac{\left(\frac{ءم}{ءص}\right)}{\left(\frac{ءم}{ءس}\right)}\,(سَ - س)$$

ومنها $(ص - صَ)\,\frac{ءم}{ءس} - (سَ - س)\,\frac{ءم}{ءص} = ٠$

(ملحوظ) اذا مر المنحنى المبين بالمعادلة $م\,(س\,و\,ص) = ٠$ بنقطة الاصل يتعين المكرر المذكور باخذ نهاية النسبة $\frac{ص}{س}$ بفرض ان $س = ٠$ لان (مطلب ٣٤)

$$نها\,\frac{ص}{س} = نها\,\frac{\frac{ءص}{ءس}}{1}$$

٧٥. الخط م د المحصور بين المماس ومرتب نقطة التماس يسمى تحت المماس والخط ط د يسمى تحت العمود فاذا جعل $ص = ٠$ فى معادلة المماس يحدث

$$- صَ = \frac{ءصَ}{ءسَ}\,(س - سَ)$$

ومنها

$$سَ - س = ا\,د - ا\,م = \frac{صَ}{\frac{ءصَ}{ءسَ}}$$

واذا رمزنا بالرمز (ت م) لتحت المماس يكون

$$ت\,م = \frac{صَ}{\frac{ءصَ}{ءسَ}} = صَ\,\frac{ءسَ}{ءصَ}$$

وبالنسبة لتحت العمود يحدث

$$\text{تع} = \bar{\text{ص}} \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$$

وفى المثلثين ح هـ د و ج ط د القائمى الزاوية نجد

$$\text{ج م} = \sqrt{\bar{\text{ص}}^{2} + \text{تم}^{2}} \qquad \text{د ج ط} = \sqrt{\bar{\text{ص}}^{2} + \text{تع}^{2}}$$

وبوضع مقدارى تم و تع نجد طول المماس وطول العمود

$$\text{طم} = \frac{\bar{\text{ص}} \sqrt{1 + \left(\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}\right)^{2}}}{\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}} = \bar{\text{ص}} \sqrt{1 + \left(\frac{\text{ء س}}{\text{ء ص}}\right)^{2}}$$

$$\text{طع} = \bar{\text{ص}} \sqrt{1 + \left(\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}\right)^{2}}$$

(تطبيقات)

٧٦ ولنطبق هذه القوانين على الهليلجى أى القطع الناقص الذى معادلته

$$\text{ا}^{2}\text{ص}^{2} + \text{ب}^{2}\text{س}^{2} - \text{ا}^{2}\text{ب}^{2} = ٠$$

فنجد

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = - \frac{\text{ب}^{2}\text{س}}{\text{ا}^{2}\text{ص}}$$

وتكون معادلة المماس

$$\text{ص} - \bar{\text{ص}} = - \frac{\text{ب}^{2}\bar{\text{س}}}{\text{ا}^{2}\bar{\text{ص}}} (\text{س} - \bar{\text{س}})$$

أو

$$\text{ا}^{2}\bar{\text{ص}}\,\text{ص} + \text{ب}^{2}\bar{\text{س}}\,\text{س} - \text{ا}^{2}\text{ب}^{2} = ٠$$

ومعادلة العمود

$$\text{ا}^{2}\bar{\text{ص}} (\text{س} - \bar{\text{س}}) - \text{ب}^{2}\bar{\text{س}} (\text{ص} - \bar{\text{ص}}) = ٠$$

ويحدث أيضا

$$\text{تم} = \frac{\text{ا}^{2} - \bar{\text{س}}^{2}}{\bar{\text{س}}}$$

$$\text{تع} = - \frac{\text{ب}^{2}\bar{\text{س}}}{\text{ا}^{2}}$$

$$\text{طم} = \frac{\bar{\text{ص}}}{\text{ب}^{2}\bar{\text{س}}} \sqrt{\text{ا}^{4}\bar{\text{ص}}^{2} + \text{ب}^{4}\bar{\text{س}}^{2}}$$

$$طع = \frac{\sqrt{أ^{4} ص^{-2} + ب^{4} س^{-2}}}{أ^{2}}$$

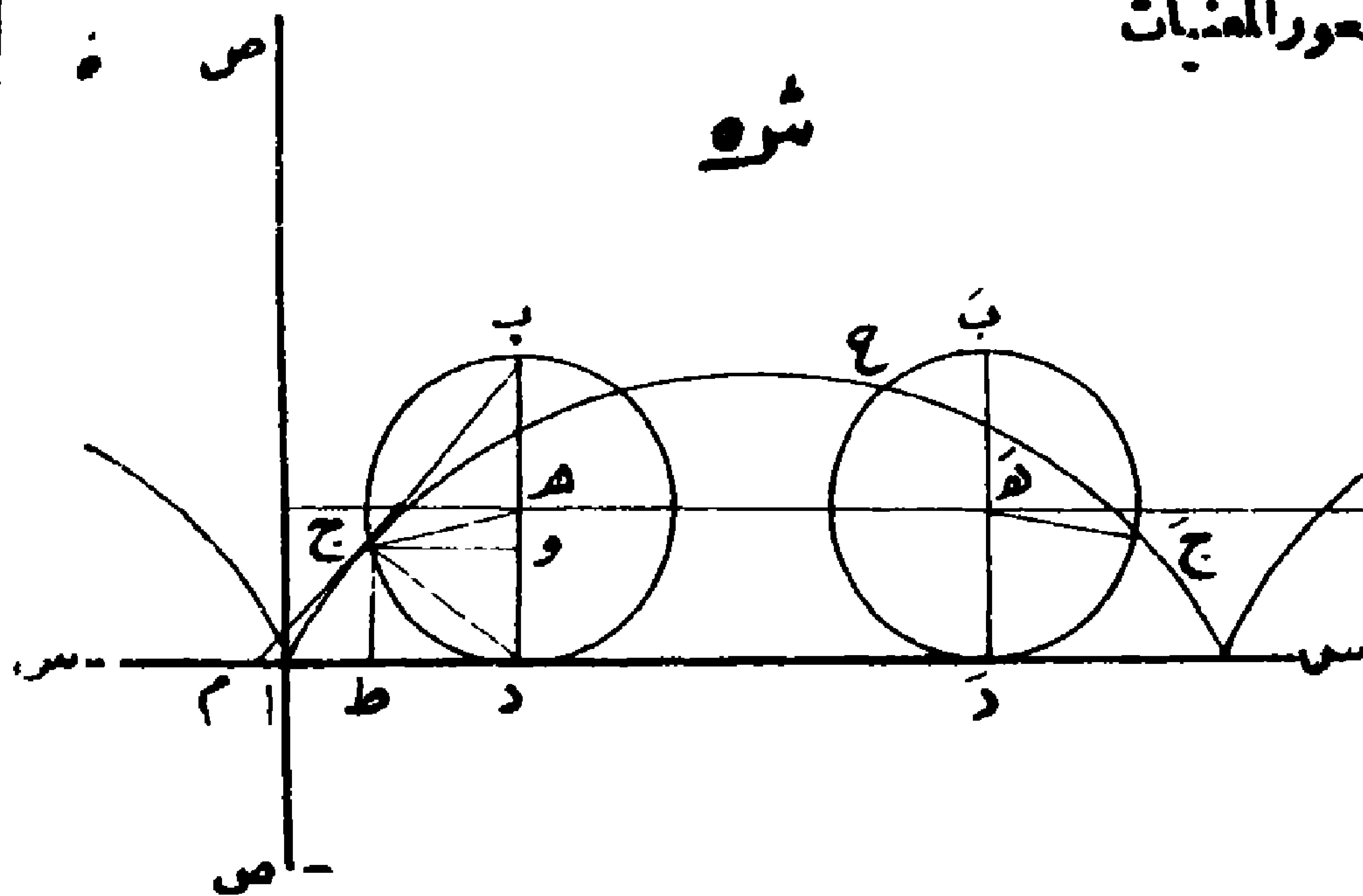
(فى السيكلويد)

٥٧٧ اذا تدحرجت دائرة على خط مستقيم بدون زلق (أى سير على الخط بنقطة واحدة) فاحدى نقط محيطها ترسم منحنيا يسمى سيكلويد (١)

وينتج من هذا ان السيكلويد فروعا عددها غير نهائى

فاذا أخذ المستقيم المفروض محور السينات واحدى نقط المنحنى الموضوعة على هذا المستقيم أخذت أصلا ثم رمز بالحرف هـ لمركز الدائرة معتبرة فى أحد مواضعها (شكل ٥) و نق لنصف قطرها و د لنقطة تماسها بمحور السينات

شكل ٥



وفرض القوس دج مساويا للفصل اد تكون النقطة ج التى احداثياها

سَ = اط ، صَ = ج ط احدى نقط السيكلويد واذا رمزنا بالحرف ء للزاوية د هـ ج يكون

قوس د ج = نق ء

---

(١) ينسب اختراع هذا المنحنى لغاليلى الشهير الطليانى (ولد سنة ١٥٦٤ ومات سنة ١٦٤٢)

ونجد فى المثلث هـ ج و القائم الزاوية

ج و = نق جا ء ، هـ و = نق جتا ء

وحيث ان

ا ط = ا د — و ح ، د و = د هـ — هـ و

يكون

سَ = نق (ء — جا ء) ، صَ = نق (١ — جتا ء)

ومن هذه المعادلة الاخيرة يحدث

جتا ء = (نق — صَ)/نق ، ء = قو جتا (نق — صَ)/نق ، جا ء = ١/نق × √(٢ نق صَ — صَ^٢)

وحيث ان القوس ء يمكن أن يكون أصغر من نصف الدائرة أو أكبر منه تبعا لوجود النقطة ج على النصف الاول أو الثانى لاحد فروع المنحنى فنعطى العلامة ± للجذر √(٢ نق صَ — صَ^٢) فى الحالة الاولى وفى الحالة الثانية نعطى له العلامة — فاذا وضعنا مقدارى ء و جا ء السابقين فى المعادلة نجد معادلة السيكلويد وهى

س = نق قو جتا (نق — ص)/نق — √(٢ نق ص — ص^٢)

ولايجاد معادلة المماس فى النقطة ج تاخذ تفاضل هذه المعادلة فيحدث

ءس = نق ءص/√(٢ نق ص — ص^٢) — (نق — ص) ءص/√(٢ نق ص — ص^٢)

ومن هذا

ءص/ءس = √(٢ نق/ص — ١)

فالمعادلة المطلوبة تكون حينئذ

صر

$$\text{ص} - \text{صَ} = \sqrt{\frac{\text{٢ نق}}{\text{صَ}} - ١}\ (\text{س} - \text{سَ})$$

وعلى ذلك تكون معادلة العمود هى

$$\text{ص} - \text{صَ} = - \sqrt{\frac{\text{صَ}}{\text{٢نق} - \text{صَ}}}\ (\text{س} - \text{سَ})$$

ويكون

$$\text{تم} = \frac{\text{صَ}^{٢}}{\sqrt{\text{٢نق صَ} - \text{صَ}^{٢}}} \ ،\ \text{نع} = \sqrt{\text{٢نق صَ} - \text{صَ}^{٢}}$$

$$\text{طم} = \text{صَ} \sqrt{\frac{\text{٢نق}}{\text{٢نق} - \text{صَ}}} \ ،\ \text{طع} = \sqrt{\text{٢نق صَ}}$$

وقد بان من هذا ان نع وسط متناسب بين در و بد = ٢ نق − صَ فيكون نع = دط ومنه ينتج ان العمود المنشأ من النقطة ج عربنقطة التماس د وان المستقيم ب ج هو المماس للسكلويد فى ح لان الزاوية د ج ب قائمة . فلرسم الدائرة ب ج د حينما تكون النقطة ج معلومة الوضع تجعل هذه النقطة مركزا وترسم قوس بنصف القطر نق فيقطع المستقيم هـ هـ الموازى لمحور المعينات الذى بعده منه يساوى نق فى نقطة هـ هى مركز الدائرة .

تمرينات

١ . لتكن $\text{ص}^{٢} = ٢\,\text{ء}\,\text{س}$ معادلة الشلجمى أى القطع المكافى فتجد للمماس المعادلة $\text{صَ ص} = \text{ء}\,(\text{س} + \text{سَ})$ والعمود $(\text{س} - \text{سَ})\,\text{ص} + (\text{ص} - \text{صَ})\,\text{ء} = ٠$.

و $\text{تم} = - \frac{\text{صَ}^{٢}}{\text{ء}}$ ، $\text{نع} = \text{ء}$ (ثابتة) ، $\text{طع} = \sqrt{\text{ء}(\text{ء} + ٢\text{سَ})}$

و $\text{طم} = \sqrt{٢\,\text{سَ}\,(\text{ء} + ٢\,\text{سَ})}$

٠٢ اذا كان $\frac{س^2}{أ^2} - \frac{ص^2}{ب^2} = ١$ معادلة الهذلولى أى القطع الزائد فتجد

المماس $\frac{س\bar{س}}{أ^2} - \frac{ص\bar{ص}}{ب^2} = ١$ والعمود $\frac{أ^2}{\bar{س}} س + \frac{ب^2}{\bar{ص}} ص = أ^2 + ب^2$

$$و\ تم = \frac{أ^2 - \bar{س}^2}{\bar{س}} \quad و\ نع = \frac{ب^2}{أ^2} \bar{س} \quad و\ طم = \frac{أ^2 \bar{ص}}{ب^2 \bar{س}}$$

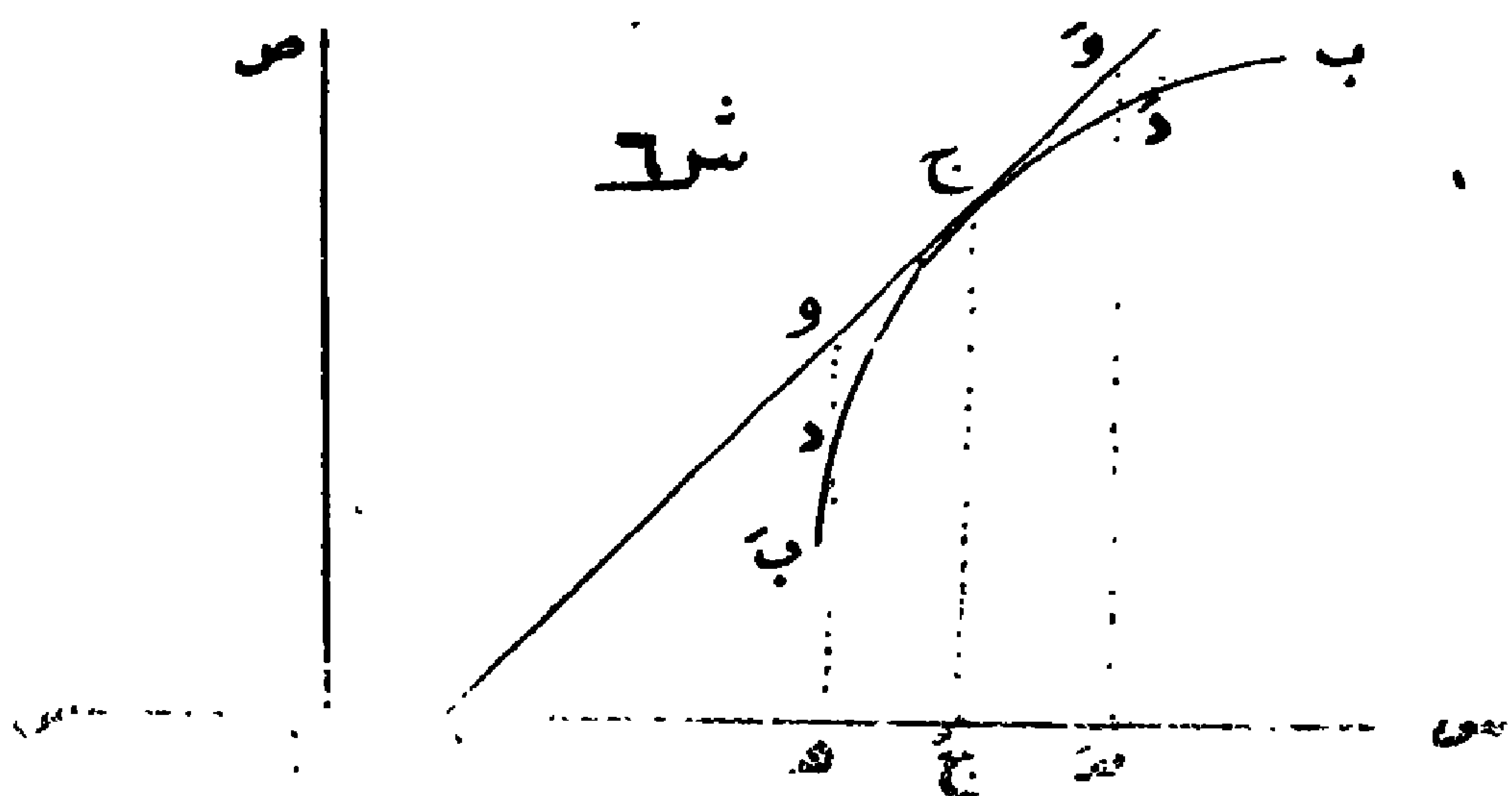
$$\times \sqrt{\frac{\bar{س}^2}{أ^4} + \frac{\bar{ص}^2}{ب^4}} \quad و\ طع = \sqrt{\frac{ب^4}{أ^4} \bar{س}^2 + \bar{ص}^2}$$

٠٣ المطلوب تم من المنحنى المبين بالمعادلة $س = ه^{\frac{س - ص}{ص}}$

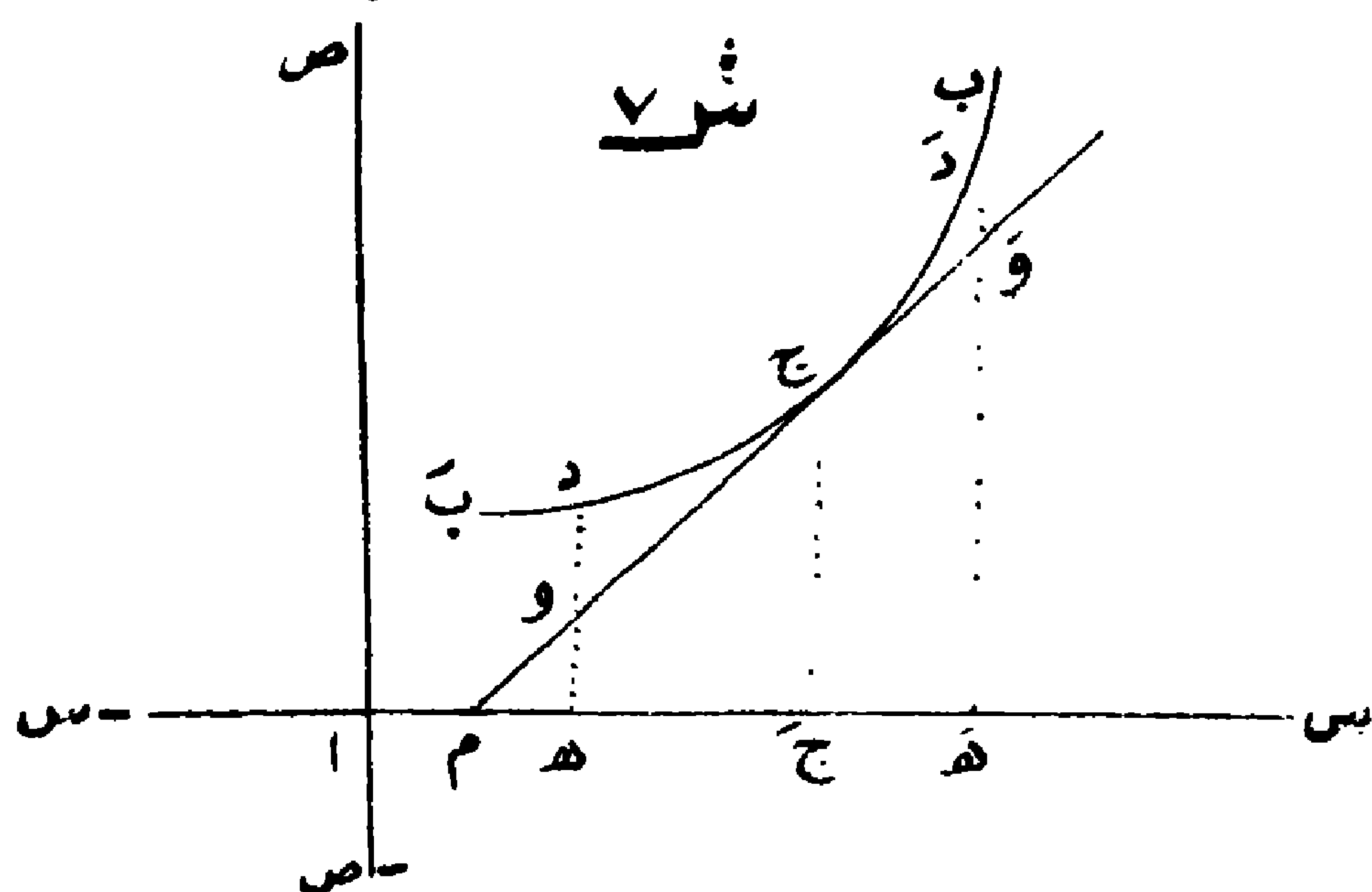
الجواب $تم = - \frac{\bar{س}^2}{\bar{س} - \bar{ص}}$

(فى التجويف والتحديب)

٠٧٨ اذا قورن مرتبا نقطتى المنحنى ب ب َ (ش ٦) المجاورتين لنقطة التماس ج وهما د هـ و د َ هـ َ بالمرتبين و هـ و و َ هـ َ المتقابلين للمماس م ج يمكن ان يعرف هل المنحنى المذكور موضوع بالنسبة الى المماس فى الجهة الموجود فيها النقطة ج َ التى هى مسقط نقطة التماس ج أو فى الجهة الاخرى



ففي الحالة الاولى (شـ٦) يكون الفرقان د هـ ـــ وهـ و دَ هَ ـــ وَ هَ سالبين فالمنحنى يدور بتجويفه جهة محور السينات الذي يمتد من النقطة م الى الجهة التي فيها النقطة جَ وأما في الحالة الثانية (شـ٧) فالفرقان المذكوران يكونان موجبين والمنحنى يدور بتحديبه الى الجهة المذكورة



فاذا فرض ان جَ هـ = ء (شـ٦ و٧) فمعادلة المماس تصير بجعل س = س + ء

$$ص = و هـ = ص + ء \frac{\text{ٯ}ص}{\text{ٯ}س}$$

وبواسطة قانون تيلور نجد لرتب المنحنى المقابل د هـ

$$د هـ = ص + ء \frac{\text{ٯ}ص}{\text{ٯ}س} + \frac{ء^2}{2!} \frac{\text{ٯ}^2ص}{\text{ٯ}س^2} + ب$$

فاذا يكون

$$د هـ - و هـ = \frac{ء^2}{2!} \frac{\text{ٯ}^2ص}{\text{ٯ}س^2} + ب$$

واذا فرضت المشتقة $\frac{\text{ٯ}^2ص}{\text{ٯ}س^2}$ غير معدومة يمكن أخذ مقدار ء صغيرا كافيا لكي ياخذ الطرف الثاني علامة الحد $\frac{ء^2}{2!} \frac{\text{ٯ}^2ص}{\text{ٯ}س^2}$ ولكن حيث ان $ء^2$ كمية موجبة مهما كانت علامة ء فيكون حينئذ $\frac{\text{ٯ}^2ص}{\text{ٯ}س^2}$ سالبا حينما

يكون المنحنى محدبا جهة المستقيم م س وموجبا فى عكس ذلك ويتحقق بالنظر الى المنحنيات الموضوعة تحت محور السينات انه يحدث العكس حينئذ يكون مرتب النقطة المعتبرة سالبا

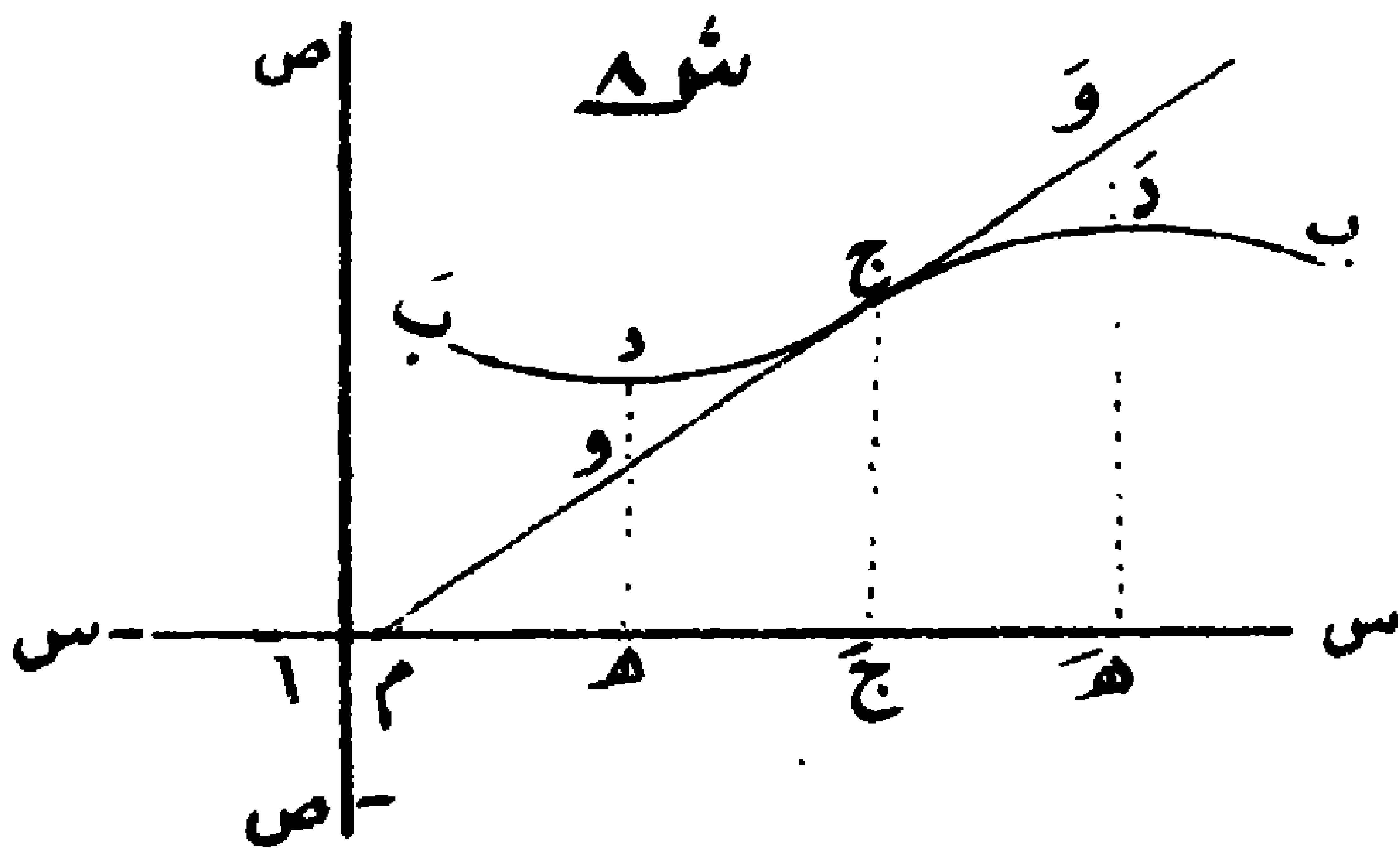
وينتج من هذا ان المنحنى يكون مجوفا أو محدبا جهة جزء محور السينات المفروض تبعا لاختلاف المرتب ومشتقته ذات المرتبة الثانية فى العلامة أو اتحادهما فيها

٧٩ . قد فرض فيما سبق ان $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$ غير معدومة فاذا فرضناها معدومة نعتبر متسلسلة تيلور لغاية الحد ذى المرتبة الرابعة فنجد

$$و\,هَ - و\,ه = \frac{ع^{٣}}{!٣}\,\frac{د^{٣}ص}{دس^{٣}} + \frac{ع^{٤}}{!٤}\,\frac{د^{٣}ص}{دس^{٤}} + ب$$

ثم نفرض ان $\frac{د^{٣}ص}{دس^{٣}}$ غير معدومة فتتغير علامة الطرف الثانى تبعا لتغير علامة ع فالمنحنى الذى هو محدب من جهة يكون مجوفا من أخرى (ش ٨) أى من جهة محور السينات والنقطة ج تسمى نقطة التغير

واذا فرضت $\frac{د^{٣}ص}{دس^{٣}} = ٠$ و $\frac{د^{٤}ص}{دس^{٤}} \neq ٠$ (١) يكون المنحنى موضوعا فى جهة واحدة من المماس أما على يمين المرتب ج جَ أو على يساره وعلامة $\frac{د^{٤}ص}{دس^{٤}}$ تبين التجوف أو التحدب



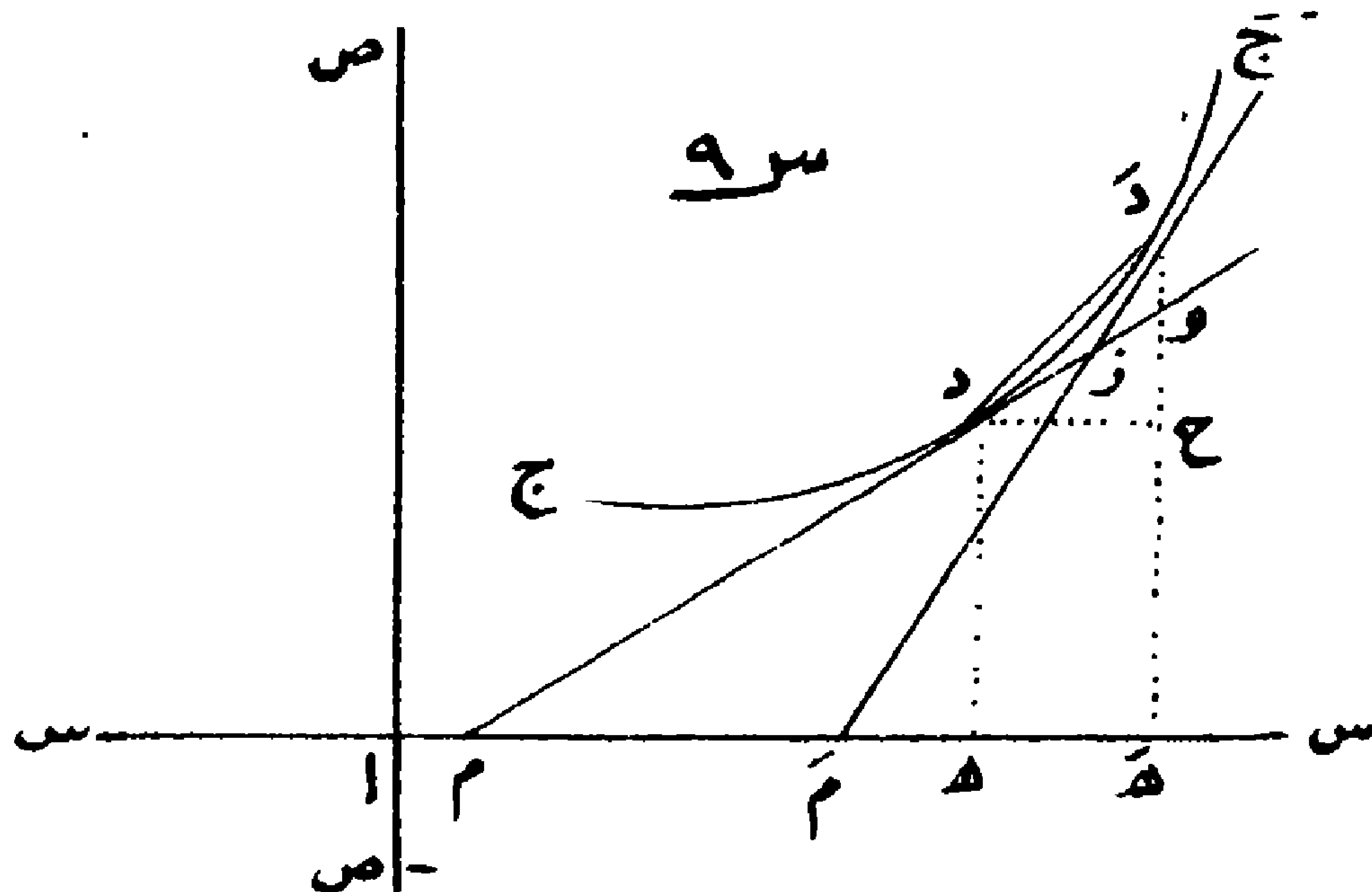
(١) العلامة $\neq$ تدل على عدم التساوى كما هو معلوم

الباب

الباب الثالث عشر

(فى تفاضل قوس المنحنى المستوى)

٨٠ · لتكن ص = م (س) معادلة منحنٍ مرسوم بالنسبة الى محورين متعامدين فاذا رمز بالحرف ى لطول القوس المعتبر من نقطة ثابتة ج (شـ٩) الى النقطة د ذات الاحداثيين س و ص تكون ى متعلقة بالمتغيرة س



وللبحث عن تفاضل هذه المتعلقة نفرض ان س + ف س و ص + ف ص احداثا نقطة ثانية مثل دَ تكون قريبة من النقطة د بحيث لا يوجد بينهما نقطة تغير فيمكن اعتبار القوس د دَ الذى نأخذ د ى رمزا لها منحصرة بين الوتر د دَ والخط المنكسر د ز + ز دَ المتكون من تلاقى المماسين فى النقطتين د و دَ وحيث ان دَ ز < و ز + دَ و ومنه د ز + دَ ز < د و + دَ و تكون هذه القوس منحصرة بالحرى بين الوتر د دَ و د و + و دَ فاذا رسم د ح موازيا لمحور السينات يكون د ح = ف ص

و $د\,د = \sqrt{ف\,س^٢ + ف\,ص^٢}$ وبالنظر في المثلث د وح نجد

$وح = دح$ ظا و دح أى $وح = \frac{ع\,ص}{ع\,س}$ ف س ومنه

$$د\,و = \sqrt{ف\,س^٢ + \frac{ع\,ص^٢}{ع\,س^٢}\,ف\,س^٢} \quad و \quad د\,و = د\,ح - و\,ح$$

$$= ف\,ص - \frac{ع\,ص}{ع\,س}\,ف\,س$$

فيمكن حينئذ كتابة المتباينتين

$$ف\,ن > \sqrt{ف\,س^٢ + ف\,ص^٢} \quad و \quad ف\,ن < ف\,س\,\sqrt{١ + \left(\frac{ع\,ص}{ع\,س}\right)^٢}$$

$$+ ف\,ص - \frac{ع\,ص}{ع\,س}\,ف\,س$$

وبالقسمة على ف س يحدث

$$\frac{ف\,ن}{ف\,س} > \sqrt{١ + \left(\frac{ف\,ص}{ف\,س}\right)^٢} \quad و \quad \frac{ف\,ن}{ف\,س} < \sqrt{١ + \left(\frac{ع\,ص}{ع\,س}\right)^٢}$$

$$+ \frac{ف\,ص}{ف\,س} - \frac{ع\,ص}{ع\,س}$$

ويشاهد من هنا أن الطرفين الثانيين يقربان جدا من النهاية $\sqrt{١ + \frac{ع\,ص^٢}{ع\,س^٢}}$

كلما قرب ف س من الصفر فحينئذ تقرب أيضا النسبة $\frac{ف\,ن}{ف\,س}$ من هذه النهاية

وتصير مشتقة القوس ن

$$\frac{ع\,ن}{ع\,س} = \sqrt{١ + \left(\frac{ع\,ص}{ع\,س}\right)^٢} \quad أو \quad \frac{ع\,ن}{ع\,س} = \sqrt{١ + م^٢\,(س)}$$

ومن هنا ينتج التفاضل المطلوب وهو

$$ع\,ن = ع\,س\,\sqrt{١ + \left(\frac{ع\,ص}{ع\,س}\right)^٢} \quad او \quad ع\,ن = \sqrt{ع\,س^٢ + ع\,ص^٢}$$

(ملحوظ) حيث ان الوتر $د\,د = \sqrt{ف\,س^٢ + ف\,ص^٢}$ يكون

$$\frac{ف\,ن}{د\,د} = \frac{ف\,ن}{\sqrt{ف\,س^٢ + ف\,ص^٢}}$$

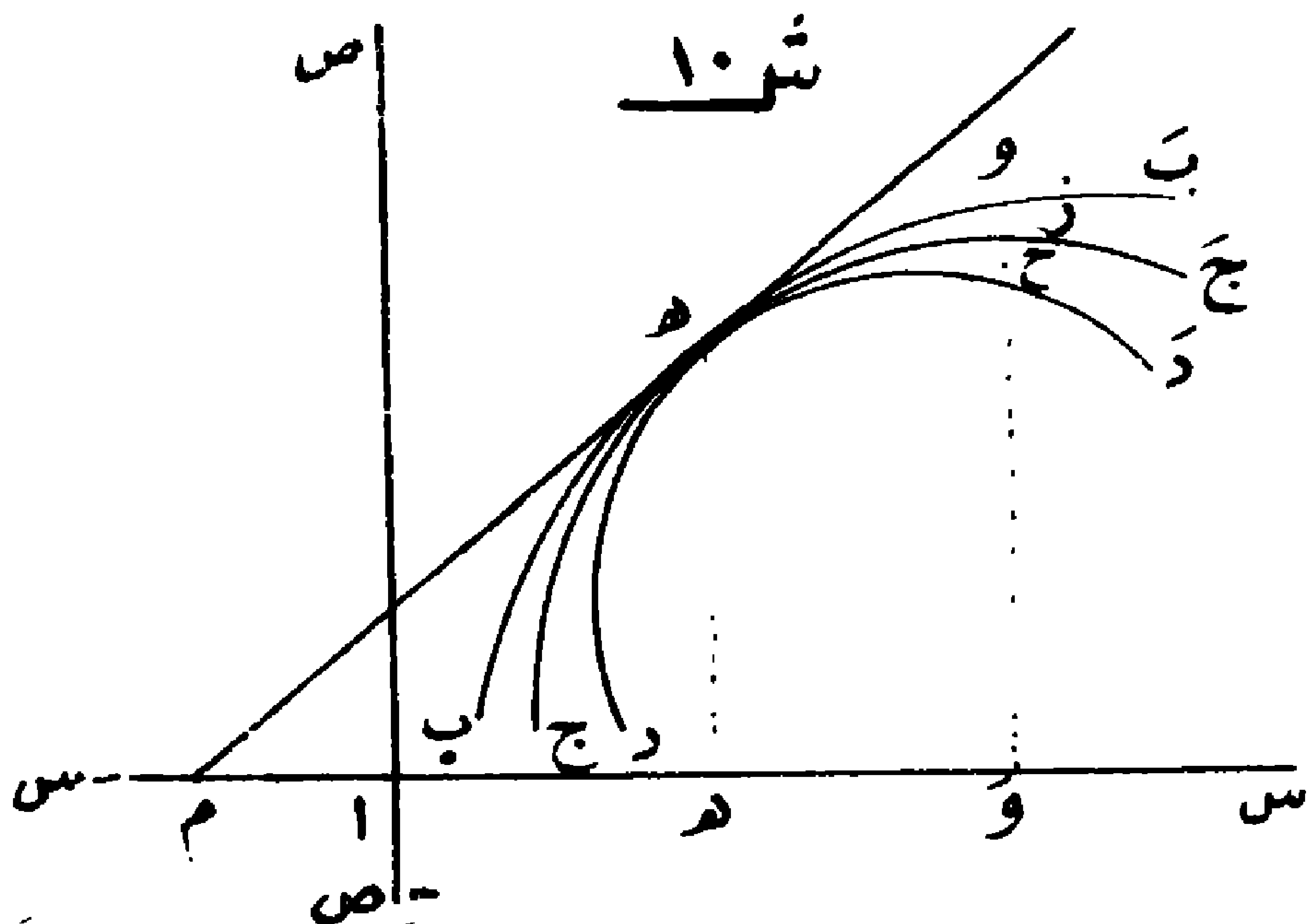
ومنه

$$نها\ \frac{ف\,ن}{د\,د} = \frac{ع\,ن}{\sqrt{ع\,س^٢ + ع\,ص^٢}} = ١$$

يعنى ان نهاية نسبة القوس لوترها تساوى الواحد

(فى تماس المنحنيات المستوية)

٨١ . لتكن ص = م (س) و ص = مـ (س) معادلتى المنحنيين ب بَ د ج جَ (شكل ١٠) المارين بالنقطة هـ وليكن س و ص احداثى هذه النقطة و س + ء معير النقطتين و و ز الموضوعتين على المنحنيين المذكورين فيحدث بمقتضى قانون تيلور



$$\text{و و}' = \text{م}(\text{س}+\text{ء}) = \text{م}(\text{س}) + \text{ء}\,\text{م}'(\text{س}) + \frac{\text{ء}^2}{2!}\text{م}''(\text{س})$$

$$+\frac{\text{ء}^3}{3!}\text{م}'''(\text{س}+\theta\text{ء})$$

$$\text{ز و}' = \text{مـ}(\text{س}+\text{ء}) = \text{مـ}(\text{س}) + \text{ء}\,\text{مـ}'(\text{س}) + \frac{\text{ء}^2}{2!}\text{مـ}''(\text{س})$$

$$+\frac{{}^3}{3!}\text{مـ}'''(\text{س}+\theta\text{ء}')$$

وحيث ان كانتا المتعلقتين م (س) و مـ (س) تساوى الرتب هـ هـَ

فيكون م (س) = مـ (س) ومن هذا ينتج

$$و و َ - ز و َ = و ز َ = ء [م (س) - مـ (س)] + \frac{ء^٢}{٢!}[م َ (س)$$

$$- مـ َ (س)] + \frac{ء^٢}{٢!}[م ً (س + ة ء) - مـ ً (س + ة َ ء)]$$

واذا كان للمنحنيين مماس واحد فى النقطة هـ [كما هو مفروض فى (شكل ١٠)] فيله على محور المنحنيات يعلم باحدى المشتقتين م َ (س) أو مـ َ (س) فتكون

م َ (س) = مـ َ (س) وتؤول المعادلة السابقة الى

$$و ز َ = \frac{ء^٢}{٢!}[م َ (س) - مـ َ (س)] + \frac{ء^٣}{٣!}[م ً (س + ة ء) -$$

$$مـ ً (س + ة َ ء)]$$

ويرى من هذا ان فرق المرتبين كمية ذات مرتبة ثانية بالنسبة الى ء فيقال حينئذ ان للمنحنيين تماسا من المرتبة الاولى واذا فرض ان للمشتقتين م ً (س) و مـ ً (س) مقدارا واحدا يؤول الفرق المذكور الى كمية ذات مرتبة ثالثة وهى

$$\frac{ء^٣}{٣!}[م ً (س + ة ء) - مـ ً (س + ة َ ء)]$$

وحينئذ يكون تماس المنحنيين من المرتبة الثانية وبجعل ذلك عاما اذا فرض فى النقطة هـ ان

م (س) = مـ (س)

م َ (س) = مـ َ (س)

م ً (س) = مـ ً (س)

. . . .

$$م^{ن}(س) = مـ^{ن}(س)$$

يكون الفرق بين المرتبين

$$\frac{ء^{ن+١}}{(ن+١)!}[م^{ن+١}(س+ةٍ) - مـ^{ن+١}(س+ةء)]$$

وهو من المرتبة ن + ١ بالنسبة الى ء فتماس المنحنيين يكون من المرتبة النونية

٨٢ · تمكن البرهنة بان كل منحن اخر مثل د دَ ذى تماس بالمنحن ب بَ مرتبته أقل من مرتبة تماس ج جَ به يكون قربه من ب بَ (في مجاورة نقطة التماس هـ) أقل من قرب ج جَ من المنحن ب بَ المذكور لانه اذا فرضت ص = ق(س) معادلة المنحن د دَ ثم فرض ان رتبة تماسه بالمنحن ب بَ هى ج المأخوذة أصغر من ن يحدث

$$م(س) = ق(س)$$

$$مَ(س) = قَ(س)$$

$$مً(س) = قً(س)$$

. . . .

$$م^{ج}(س) = ق^{ج}(س)$$

فاذا يصير

$$و ز = \frac{ء^{ج+١}}{(ج+١)!}[م^{ج+١}(س+ةء) - ق^{ج+١}(س+ةً ء)]$$

وباخذ نسبة البعدين و ز وو ح ينتج

$$\text{وز} = \frac{ء^{ن-ح}}{(ن+١)!}[م^{ن+١}(س+ةء) - م^{ن+١}(س+ةَء)]$$

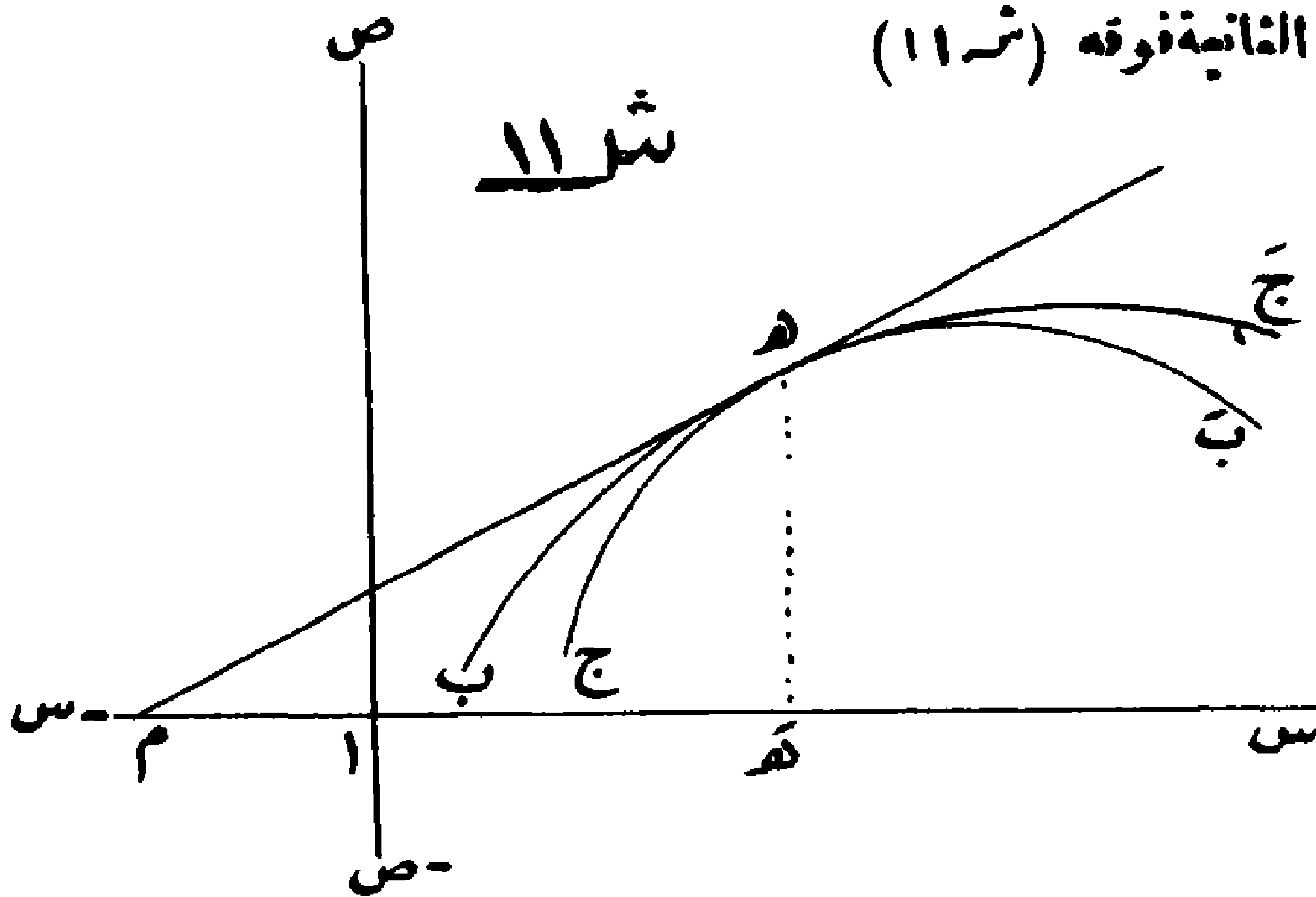
$$\text{وح} = \frac{١}{(ح+١)!}[م^{ح+١}(س+ةء) - \text{ﻫ}^{ح+١}(س+ةً ء)]$$

ويرى من هنا ان ليس و ز < و ح فقط بل نسبتهما تصغر حتى تقرب جدا من الصفر

٨٣ . حينما يكون لمنحنيين تماس رتبة زوجية فانهما يتقاطعان فى حالة تماسهما لانه ينتج من المعادلة

$$\text{وز} = \frac{ء^{ن+١}}{(ن+١)!}[م^{ن+١}(س+ةء) - م^{ن+١}(س+ةَء)]$$

انه مع مقادير ء الصغيرة الموجبة أو السالبة تكون علامة العامل الثانى مثل علامة $م^{ن+١}(س) - م^{ن+١}(س)$ ولكن اذا كان ن زوجيا فعلامة $ء^{ن+١}$ تغير تبعا لتغير علامة ء ويؤخذ من هذا أن المنحن ج جَ يكون موضوعا من احدى جهة المرتب هـ هـَ تحت ب بَ ومن الجهة الثانية فوقه (شـ ١١)



واذا كانت رتبة التماس فردية وتغيرت علامة ع حفظ المقدار السابق علامته وينتج من هذا أن أحد المنحنيين يحيط بالآخر (شـ ١٠)

(فى المنحنيات الالتصاقية)

٨٤ . لتكن ص = ه (س) معادلة عامة لمنحنيات من نوع معلوم فهى تحتوى على عدة ثوابت اختيارية يمكن ايجادها اذا فرض ان لاحد المنحنيات تماسا بمنحن معلوم من أعلى مرتبة فاذا كان مثلا ن + ١ هو عدد الثوابت يكون ن مرتبة التماس ونجد المعادلات

$$\text{م}(\text{س}) = \text{ه}(\text{س})$$

$$\text{م}'(\text{س}) = \text{ه}'(\text{س})$$

$$\text{م}''(\text{س}) = \text{ه}''(\text{س})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\text{م}^{\text{ن}}(\text{س}) = \text{ه}^{\text{ن}}(\text{س})$$

التى عددها يساوى عدد الثوابت فبواسطتها نجد مقادير الثوابت المذكورة وبوضعها فى المعادلة ص = ه (س) يحدث منحنى يسمى بالمنحنى الالتصاقى

(فى الدائرة الالتصاقية)

٨٥ . اذا اعتبرنا مثلا الدائرة التى معادلتها العامة

$$(\text{س} - \text{ى})^2 + (\text{ص} - \text{د})^2 = \text{نق}^2$$

بفرض ان د و احداثا مركزها و نق نصف قطرها ولاحظنا ان التماس من المرتبة الثانية بما ان عدد الثوابت الاختيارية ثلاثة نجد باخذ تفاضل هذه المعادلة مرتين

$$\text{س} - \text{ى} + (\text{ص} - \text{د})\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = 0$$

$$1 + \frac{\text{ءص}^2}{\text{ءس}} + (\text{ص} - \text{د})\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} = 0$$

نعلى حسب ماتقدم ينبغى أخذ ص و $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ و $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$ مساوية م (س)

د م (س) د مَ (س) ثم تحل المعادلات الناتجة بالنسبة الى ى و د و نق ولكن يمكن ايجاد المطلوب باخذ مقادير الثوابت المذكورة من المعادلات السابقة باعتبار ان س و ص و $\frac{ء^٢ص}{ءس}$ و $\frac{ء^٢ص}{ءس}$ منسوبة الى نقطة التماس في المنحنى ص = م (س) فنجد

$$
(١)\left\{
\begin{aligned}
ص - د &= - \frac{١ + \frac{ءص^٢}{ءس^٢}}{\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}} \\
س - د &= \frac{ءص}{ءس}\,\frac{١ + \frac{ءص}{ءس^٢}}{\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}} \\
نق &= \pm \frac{\left(١ + \frac{ءص^٢}{ءس^٢}\right)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}}
\end{aligned}
\right.
$$

وبواسطة هذه القوانين يوضع مركز الدائرة الالتصاقية ويعلم مقدار نصف قطرها اما علامة القانون الاخير فانها تكون + أو − على حسب كون $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ موجبة أو سالبة

٨٦. ينتج من المعادلة

$$س - د + (ص - د) \frac{ءص}{ءس} = ٠$$

ان احداثى المركز (د و د) يحققان المعادلة

$$صَ - ص = - \frac{١}{\frac{ءص}{ءس}} (سَ - س)$$

أو $$سَ - س + (صَ - ص) \frac{ءص}{ءس} = ٠$$

وهي معادلة العمود على المماس فاذا يكون مركز الدائرة الالتصاقية موضوعا على العمود المذكور وينتج ذلك أيضا من ملاحظة ان للمنحنى والدائرة

مماساواحدا فى نقطة التماس

(ملحوظ) غالبا يكون تماس الدائرة الاتصالية بالمنحنى من مرتبة زوجية فيتقاطعان بمجرد الملامسة وفى بعض النقط رتبة التماس تكون أعلى من الثانية كما فى رؤوس القطع الناقص فلا يتقاطعان حينئذ اذا كانت رتبة التماس فردية

(فى انحناء المنحنيات)

٨٧ · تسمى انحناء القوس ج جَ (شـ ١٢) الزاوية م د مَ الحادثة من تلاقى المماسين فى طرفى هذا قوس وهذه الزاوية فى الدائرة مثلا تساوى زاوية نصفى القطر هـ ج و هـ جَ فتكون حينئذ هذه الزاوية والقوس ج جَ متناسبين

أعنى انه فى دائرة واحدة تكون نسبة الزاوية م د مَ الى القوس ج جَ كمية ثابتة فلذا تؤخذ مقياسا الانحناء القوس المساوى للواحد وتسمى انحناء الدائرة وباخذ نق رمزا لنصف القطر و ة و فـ ى للزاوية م د مَ والقوس ج جَ يحدث

$$\text{فى} = \text{نق}\ \text{ة} \quad \text{ومنه} \quad \frac{\text{ة}}{\text{فى}} = \frac{1}{\text{نق}}$$

١ ١

أعني ان انحناء الدائرة يساوي عكس نصف قطرها

والنسبة $\frac{ة}{ف ى}$ التي تغير أي منحنى بتغير القوس ف ى المفروضة تسمى الانحناء المتوسط لهذه القوس ويسمى نصف قطر الانحناء المتوسط نصف قطر الدائرة التي انحناؤها يعادل $\frac{ة}{ف ى}$ الذي يوجد بواسطة القانون $نق_١ = \frac{ف ى}{ة}$

واذا فرضنا ان النقطة $\bar{ج}$ تقرب جدا من ج فالنسبة المذكورة تقرب من نهاية يقال لها الانحناء المنحنى في النقطة ج وهي مساوية لانحناء الدائرة التي نصف قطرها

$$نق = نها \frac{ف ى}{ة}$$

ولايجاد مقدار نق بواسطة احداثي النقطة ج نلاحظ ان الزاوية ة تساوي فرق الزاويتين ج م س و ج م س فاذا رمزنا للاولى بالحرف ل تكون الثانية ل + ف ل واذا تصير ة = ف ل ويكون

$$نق = نها \frac{ف ى}{ف ل} = \frac{ءى}{ءل}$$

وحيث ان طا ل $= \frac{ءص}{ءس} = \bar{ص}$ أو ل = قو طا $\bar{ص}$

يحدث $ءل = \frac{ء\bar{\bar{ص}}}{١+\bar{ص}^٢} = \frac{\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}}{١ + \frac{ءص^٢}{ءس^٢}} ءس$

وحينئذ يكون

$$نق = \frac{١ + \frac{ءص^٢}{ءس^٢}}{\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}} \frac{ءى}{ءس} = \frac{(١ + \frac{ءص^٢}{ءس^٢})^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{ء^٢ص}{ء^٢}}$$ وهو المطلوب

ويشاهد من هنا ان نصف قطر الانحناء يعادل نصف قطر الدائرة لاالتصاقية فلذا تسمى هذه الدائرة دائرة الانحناء أيضا ومركزها مركز الانحناء والزاوية

الصغيرة جدا ى ل زاوية التماس

الباب الرابع عشر

(في المنتشرات والانتشارات)

٨٨ • المنحني المنتشر هو المسير الهندسي لمراكز انحناء منحني معلوم ونتحصل معادلته بحذف الاحداثيين س و ص لنقطة التماس من معادلة المنحني المفروض وهي م (س و ص) = ٠ ومن المعادلتين

$$\left.\begin{aligned} &\text{س} - \text{ى} + (\text{ص} - \text{د})\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠ \\ &١ + \frac{\text{ءص}^٢}{\text{ءس}^٢} + (\text{ص} - \text{د})\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ءس}^٢} = ٠ \end{aligned}\right\} (\text{ب})$$

ثم اذا اوجدنا ارتباطا بين (ى و د) يوافق جميع مراكز الانحناء وحينئذ يوافق معادلة المنحني الذي هو مسيرها الهندسي

٨٩ • اذا اعتبرنا ص متعلقة بالمتغيرة س ومعلومة بمعادلة المنحني فالمعادلتان (ب) تعينان ى و د بواسطة المتغيرة المذكورة فيمكن ان يستخرج منهما المشتقتان $\frac{\text{ءى}}{\text{ءس}}$ و $\frac{\text{ءد}}{\text{ءس}}$ وحينئذ توجد مشتقة المرتب د بالنسبة الى ى فبأخذ تفاضل الاولى يحدث

$$١ + \frac{\text{ءص}^٢}{\text{ءس}^٢} + (\text{ص} - \text{د})\frac{\text{ء}^٢\text{ص}}{\text{ءس}^٢} + \frac{\text{ءى}}{\text{ءس}} - \frac{\text{ءد}}{\text{ءس}}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$$

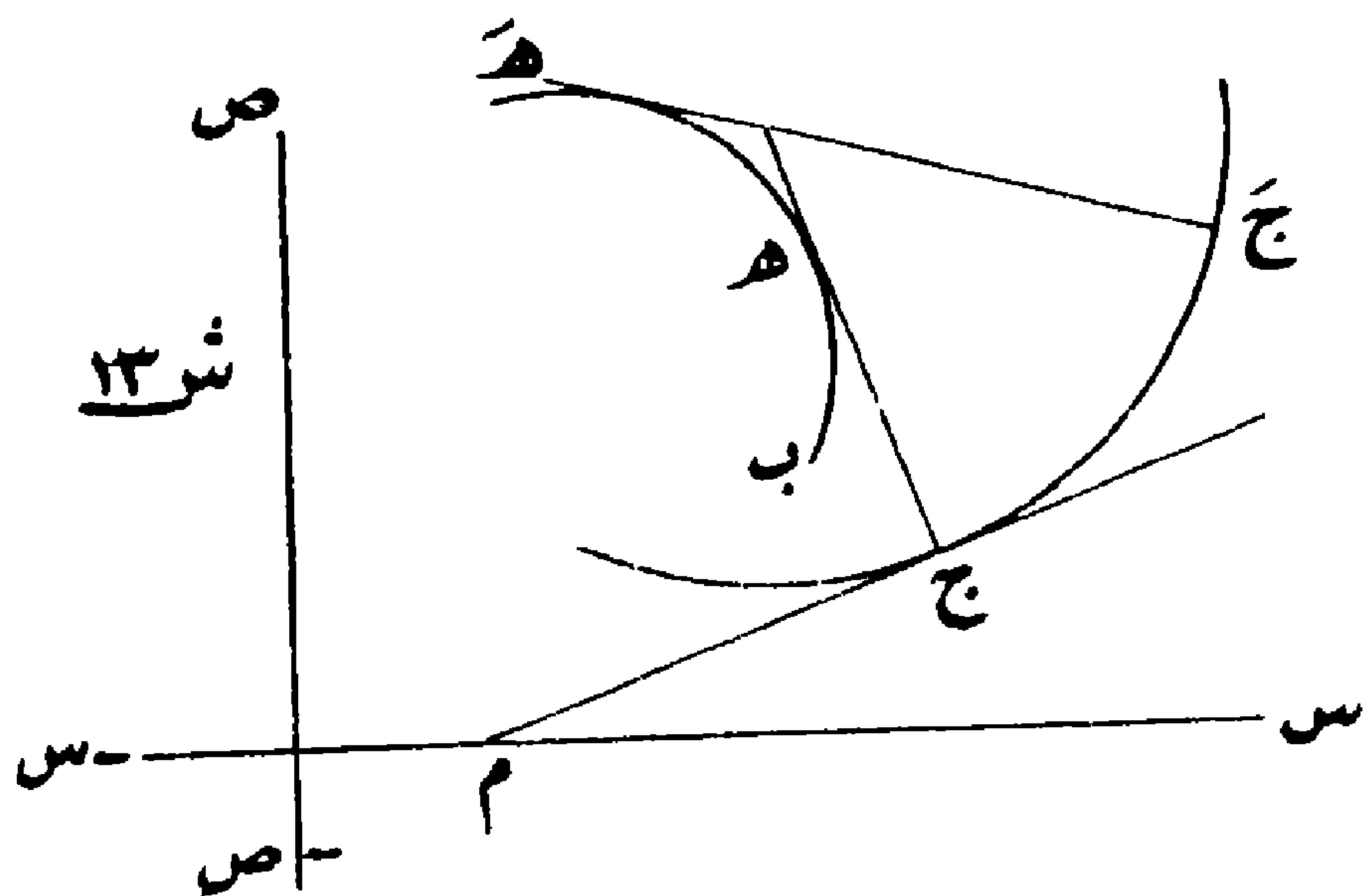
وبحذف الحدود المتشابهة بموجب المعادلة الثانية تؤول هذه المعادلة الى

$$\frac{\text{ءد}}{\text{ءس}}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + \frac{\text{ءى}}{\text{ءس}} = ٠$$

أو

$$\frac{\text{ءد}}{\text{ءى}}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + ١ = ٠$$

وينتج من هذه المعادلة ان المماس ج م (شكل ١٣) للمنحني المفروض يكون عمودا على مماس المنحني المنتشر في النقطة المقابلة اعني ان نصف قطر الانحناء ج هـ يمس دائما المنتشر



٥٩٠ وبأخذ تفاضل المعادلة

$$(س - ى)^٢ + (ص - و)^٢ = نق^٢$$

باعتبار ى و و و نق متعلقات بالمغيرة يحدث

$$(س - ى)\left(١ - \frac{ف ى}{ف س}\right) + (ص - و)\left(\frac{ف ص}{ف س} - \frac{ف و}{ف س}\right) = نق \frac{ف نق}{ف س}$$

وبحذف الحدود المتشابهة بمقتضى المعادلتين (ب) يكون

$$(ى - س)\frac{ف ى}{ف س} + (و - ص)\frac{ف و}{ف س} = نق \frac{ف نق}{ف س}$$

وبوضع مقادير س - ى و ص - و و نق المعلومة من قانونين (أ) ثم حذف العامل المشترك وهو

$$\frac{١ + \frac{ف ص^٢}{ف س^٢}}{\frac{ف^٢ ص}{ف س^٢}}$$

يكون

$$\frac{ف نق}{ف س} = \frac{\frac{ف و}{ف س} - \frac{ف ص}{ف س}\frac{ف ى}{ف س}}{\sqrt{١ + \frac{ف ص^٢}{ف س^٢}}}$$

وبوضع $- \frac{ف ى}{ف و}$ بدلا عن $\frac{ف ص}{ف س}$ يحدث بقطع النظر عن العلامة

$$\frac{ف نق}{ف س} = \sqrt{\frac{ف ى^٢}{ف س^٢} + \frac{ف و^٢}{ف س^٢}}$$

ومنه $$\delta\,\text{نق} = \sqrt{\delta\text{د}^2 + \delta\text{دَ}^2}$$

وبالرمز بالحرف ى للقوس ب هَ المعتبر من نقطة ثابتة ب الكائنة على المنتشر يكون

$$\delta\,\text{ى} = \sqrt{\delta\text{د}^2 + \delta\text{دَ}^2}$$

ومنه $$\delta\,\text{نق} = \delta\,\text{ى} \quad \text{و} \quad \delta(\text{نق} - \text{ى}) = 0$$

فاذا يكون بفرض ث كمية ثابتة

$$\text{نق} - \text{ى} = \text{ث}$$

ونجد أيضا بالنسبة لنقطة أخرى

$$\text{نقَ} - \text{ىَ} = \text{ث}$$

فيكون

$$\text{نق} - \text{ى} = \text{نقَ} - \text{ىَ} \quad \text{أو} \quad \text{نق} - \text{نقَ} = \text{ى} - \text{ىَ}$$

أعني أن القوس هـ هَ الكائن بين نقطتين من المنتشر يساوي في المقدار فرق نصفي قطري الانحناء المقابل في هاتين النقطتين

فاذا فرضنا خيطا لينا غير قابل للتمدد طوله يساوي جَ هَ ثم فرضنا أن احد طرفيه ثابت في النقطة هَ وأنه هو منطبق على نصف القطر جَ هَ فاذا تحرك هذا الخيط بحيث يرجع منه على القوس هـ هَ فطرفه الخالص يرسم المنحنى ج جَ أعني انه بواسطة نشر أقواس المنحنى ب هَ الى خطوط مستقيمة يمكن رسم المنحنى ج جَ ولهذا سمي بالمنحنى المنتشر والمنحنى ج جَ يسمى انتشاره

(ملحوظ) لا يكون لمنحنى الا منتشر واحد ويكون له عدة انتشارات لانه يمكن اطالة الخيط المذكور وتقصيره كما يراد

(تطبيقات)

٠٩١ لتكن معادلة القطع الناقص

$$ا^٢ ص^٢ + ب^٢ س^٢ = ا^٢ ب^٢$$

فبأخذ تفاضلها مرتين يحدث

$$ا^٢ ص \frac{ءص}{ءس} + ب^٢ س = ٠$$

$$ا^٢ ص \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + ب^٢ \frac{ءص^٢}{ءس^٢} + ب^٢ = ٠$$

ومن الاولى ينتج $\frac{ءص}{ءس} = - \frac{ب^٢ س}{ا^٢ ص}$

وبوضع هذا المقدار في الثانية يحدث

$$ا^٤ ص^٣ \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + ب^٢ (ا^٢ ص^٢ + ب^٢ س^٢) = ٠$$

ومنه $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = - \frac{ب^٤}{ا^٢ ص^٣}$

فيكون نصف قطر الانحناء

$$نق = \frac{(ا^٤ ص^٢ + ب^٤ س^٢)^{\frac{٣}{٢}}}{ا^٤ ب^٤}$$

وبمقارنة هذا المقدار بمقدار العمود وهو

$$طع = \sqrt{ص^٢ + ص^٢ \frac{ءص^٢}{ءس^٢}} = \sqrt{\frac{ا^٤ ص^٢ + ب^٤ س^٢}{ا^٤}}$$

يحدث $نق = \frac{ا^٢}{ب^٤} طع^٣ = \frac{طع^٣}{خ^٢}$

أعني أن نصف قطر الانحناء في القطع الناقص يعادل مكعب العمود مقسوما على مربع $\frac{ب^٢}{ا}$ أي على مربع نصف العيار (١)

---

(١) تجد في المطالب ١١٣ طريقة هندسية سهلة لايجاد مركز الدائرة الالتصاقية ونصف قطرها في المنحنيات المخروطية

٩٢ • اذا وضعنا مقدارى $\frac{dص}{dس}$ و $\frac{d^2ص}{dس^2}$ فى القانون (ب)
(مطلب ٨٨) يحدث

$$ص - و = \frac{ص\,(أ^4 ص^2 + ب^4 س^2)}{أ^2 ب^4}$$

ومنه

$$و = - \frac{ص\,[\,أ^4 ص^2 - ب^2 (أ^2 ب^2 - ب^2 س^2)\,]}{أ^2 ب^4}$$

وبجعل $أ^2 - ب^2 = ج^2$ نجد

$$و = - \frac{ج^2}{ب^4} ص^3$$

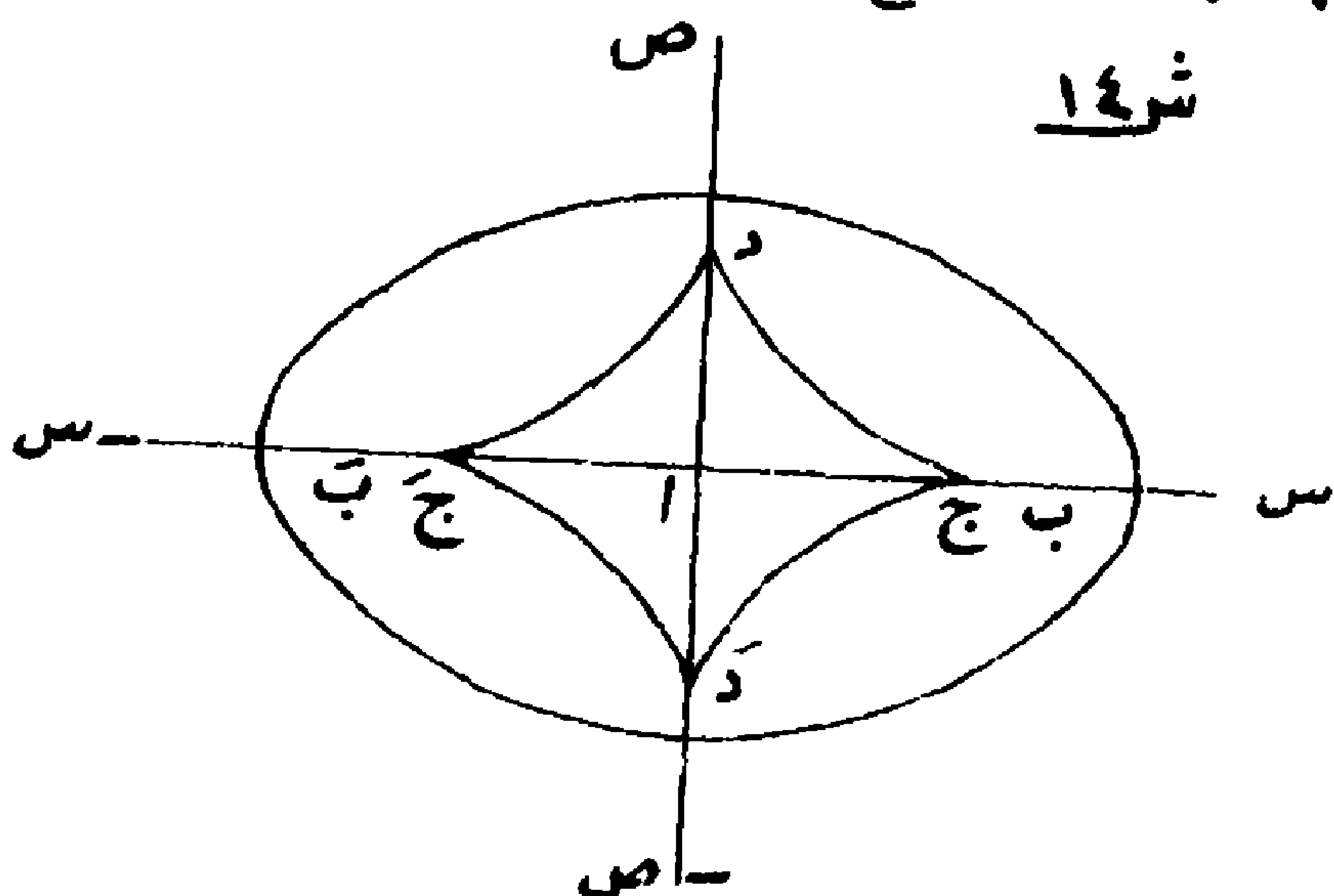
وبالمثل يكون $د = \frac{ج^2}{أ^4} س^3$

واذا أخذنا مقدارى س و ص من هاتين المعادلتين وضعناهما فى معادلة المنحنى المفروض يكون

$$أ^{\frac{2}{3}} د^{\frac{2}{3}} + ب^{\frac{2}{3}} و^{\frac{2}{3}} = ج^{\frac{4}{3}}$$

وهذه هى معادلة المنتشر

ويشاهد من هذا ان هذا المنحنى متكون من أربعة فروع موضوعة على نظم واحد بالنسبة لمحورى القطع الناقص (شكل ١٤)



وبجعل و = ٠ يحدث ء = $\pm \frac{ج^2}{ا}$ فيحدد النقطتين ج ، جَ

الموضوعتين بين البورتين واذا جعلنا س = ٠ نجد أن المنحنى يلاقي محور

المرتبات في النقطتين د ، دَ وبأخذ تفاضل المعادلة السابقة مرتين يحدث

$$ا^{\frac{2}{3}} ء^{-\frac{1}{3}} + ب^{\frac{2}{3}} و^{-\frac{1}{3}} \frac{ءو}{ءء} = ٠$$

$$-\frac{1}{3} ا^{\frac{2}{3}} ء^{-\frac{4}{3}} - \frac{1}{3} ب^{\frac{2}{3}} و^{-\frac{4}{3}} \frac{ءو^2}{ءء^2} + ب^{\frac{2}{3}} و^{-\frac{1}{3}} \frac{ء^2و}{ءء^2} = ٠$$

ومن هذا يحدث

$$\frac{ءو}{ءء} = -\left(\frac{ا}{ب}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{و}{ء}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{ء^2و}{ءء^2} = و^{\frac{1}{3}} \frac{ا^{\frac{2}{3}} ء^{-\frac{4}{3}} + ب^{\frac{2}{3}} و^{-\frac{4}{3}} \frac{ءو^2}{ءء^2}}{٣ب^{\frac{2}{3}}}$$

وبالنظر في المعادلة الاخيرة نجد ان $\frac{ء^2و}{ءء^2}$ و ء متحدا العلامة فيكون

المنحنى محدبا من جهة محور السينات وفي النقطتين ج ، جَ يكون و = ٠

فاذا $\frac{ءو}{ءء} = ٠$ ثم في د ، دَ يكون ء = ٠ فتكون المشتقة

$\frac{ءو}{ءء}$ لانهائية ويتبع من هنا أن المحورين يمسان المنتشر في نقط تلاقيهما

الاربع به وفي رؤس القطع نصفا قطري الانحناء يكونان $\frac{ا^2}{ب}$ و $\frac{ب^2}{ا}$

وحيث ان قوس المنتشر يساوي فرق نصفي قطري الانحناء فطول احد فروع

المنحنى يكون

$$\frac{ا^2}{ب} - \frac{ب^2}{ا} = \frac{ا^3 - ب^3}{ا ب}$$

٩٣ اذا اريد ايجاد النتائج السابقة بالنظر الى القطع الزائد يكفي ان تبدل

فيهما

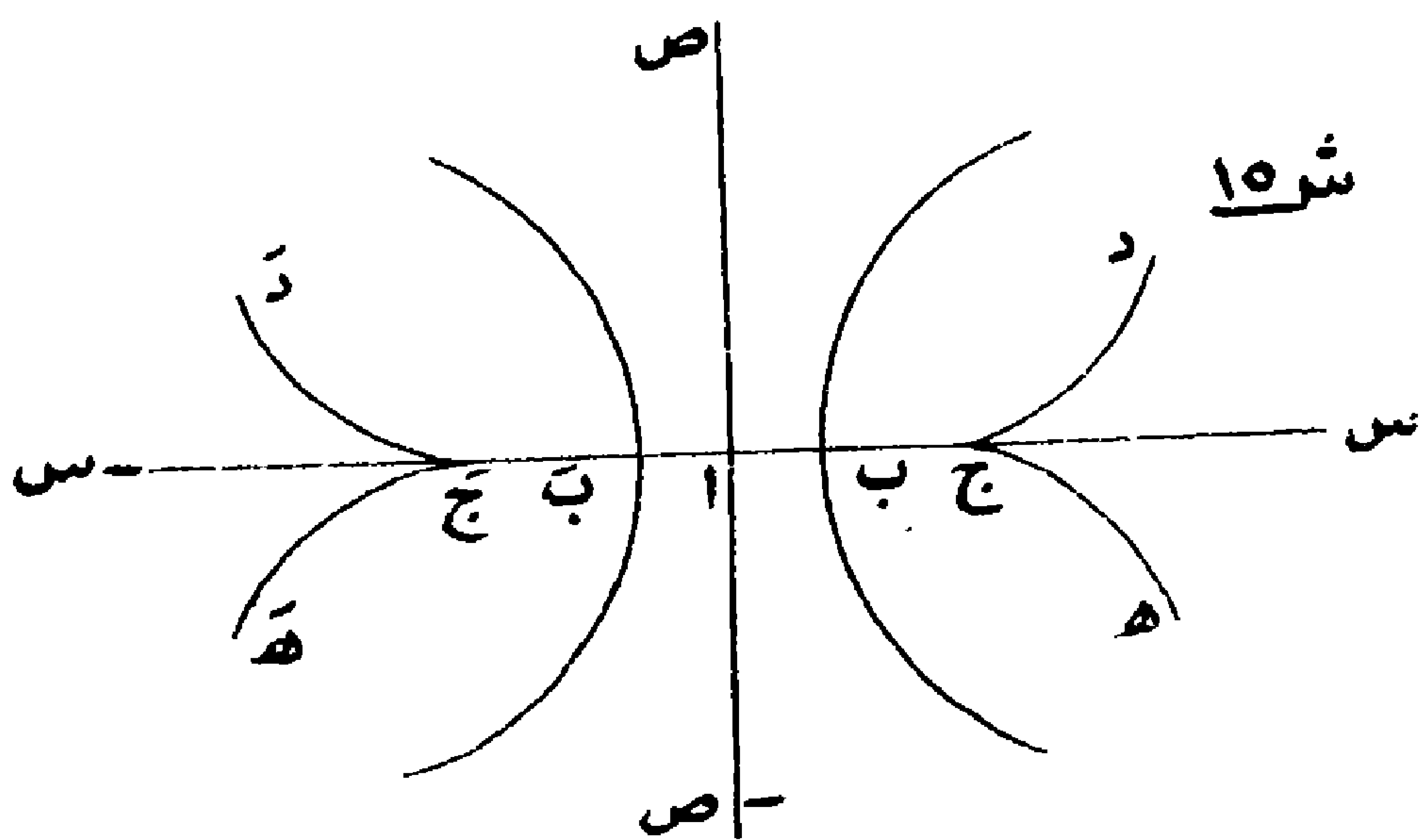
فيهما ب بالكمية — ب فنجد نصف قطر الانحناء

$$\text{نق} = \frac{(\text{ا}^{4}\text{س}^{2} + \text{ب}^{4}\text{س}^{2})^{\frac{3}{2}}}{\text{ا}^{4}\text{ب}^{4}} = \frac{\text{ا}^{2}}{\text{ب}^{4}}\ \text{طع}^{3}$$

ومعادلة المنتشر

$$\text{ا}\ \text{ى}^{\frac{2}{3}} - \text{ب}^{\frac{2}{3}}\ \text{و}^{\frac{2}{3}} = (\text{ا}^{2} + \text{ب}^{2})^{\frac{2}{3}}$$

وبمثل المناقشة السابقة نجد ان المنتشر يتكون من فرعين غير تامين د هـ و دَ هـَ (شـ ١٥) محدبين من جهة محور القطع ويمسان هذا المحور في النقطتين ج جَ الموضوعتين خارج البورتين ب و بَ



٩٤. لتكن $\text{ص}^{2} = 2\ \text{ع}\ \text{س}$ معادلة القطع المكافئ فيكون

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{\text{ع}}{\text{ص}}\ ,\ \frac{\text{ء}^{2}\text{ص}}{\text{ء س}^{2}} = -\frac{\text{ع}}{\text{ص}^{2}}\ \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = -\frac{\text{ع}^{2}}{\text{ص}^{3}}$$

وبوضع هذا المقدار في قانون نصف قطر الانحناء يحدث

$$\text{نق} = \frac{(\text{ص}^{2} + \text{ع}^{2})^{\frac{3}{2}}}{\text{ع}^{2}} \quad \text{أو} \quad \text{نق} = \frac{\text{طع}^{3}}{\text{ع}^{2}}$$

لان العمودي يساوي $\sqrt{\text{ص}^{2} + \text{ع}^{2}}$

٨٨

وبوضع مقدارى المشتقتين $\frac{ٯص}{ٯس}$ و $\frac{ٯ^2ص}{ٯس^2}$ فى المعادلة الثانية (ب) الطلب يكون

$$ص - و = \frac{ص^2 + ع^2}{ع^2} ص$$

ومنه $$و = - \frac{ص^3}{ع^2}$$

ويوجد أيضا $$س - ى = - \frac{ص^2 + ع^2}{ع}$$

ومنه $$ى = 3 س + ع$$

ومن هاتين المعادلتين ينتج

$$ص^2 = ع^{\frac{4}{3}} و^{\frac{2}{3}} \quad , \quad س = \frac{ى - ع}{3}$$

فاذا وضعنا هذين المقدارين فى معادلة القطع المكافئ يحدث بعد محو العامل ع

$$ع^{\frac{1}{3}} و^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} (ى - ع)$$

أو $$و^2 = \frac{8}{27 ع} (ى - ع)^3$$

وهى معادلة المنتشر

واذا أخذنا تفاضل المعادلة الاولى نجد

$$ع^{\frac{1}{3}} و^{-\frac{1}{3}} \frac{ٯو}{ٯى} = 1 \quad \text{ومنه} \quad \frac{ٯو}{ٯى} = \frac{و^{\frac{1}{3}}}{ع^{\frac{1}{3}}}$$

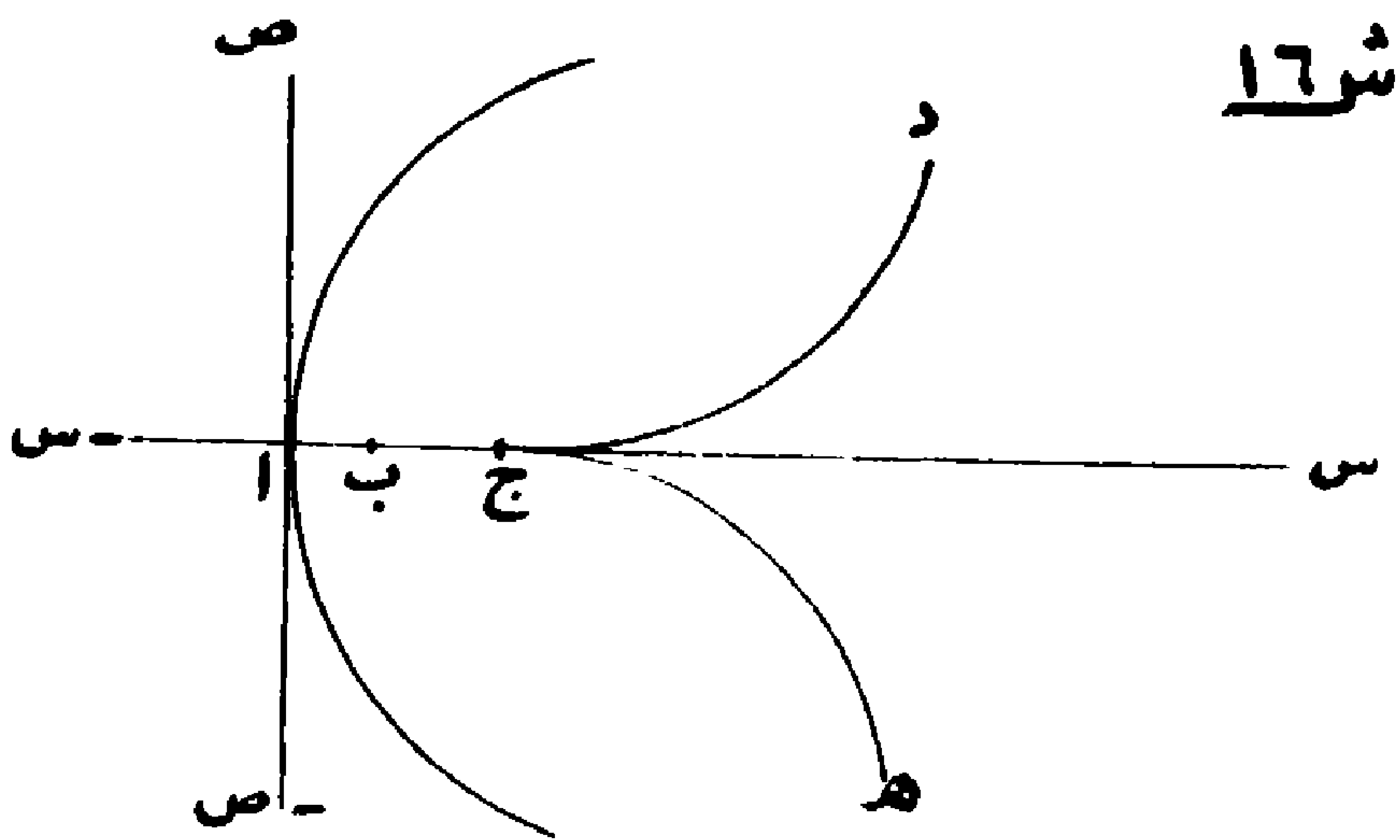
وبعمل التفاضل مرة ثانية نجد

$$\frac{ٯ^2و}{ٯى^2} = \frac{و^{-\frac{2}{3}}}{3 ع^{\frac{1}{3}}} \frac{ٯو}{ٯى} = \frac{1}{3 ع^{\frac{2}{3}} و^{\frac{1}{3}}}$$

وبذا يظهر ان المنتشر يتكون من الفرعين ج د و ج هـ (شكل ١٦) المحدبين جهة محور المينات لان $\frac{ٯ^2و}{ٯى^2}$ و و متحدا العلامة وفى نقطة تلاقيه بالمحور المذكور يكون

$$و = 0 \quad , \quad ى = ع \quad , \quad \frac{ٯو}{ٯى} = 0$$

ويؤخذ من هنا ان هذا المحور يكون مماسا للمنتشر فى تلك النقطة



٩٥ . لنفرض الآن معادلة اسيكلويد

$$س = ح \ قو \ جتا \frac{ح - ص}{ح} - \sqrt{٢ ح ص - ص^{٢}}$$

الموضوع فيها ح عوضاً عن نق

فحيث تقدم في المطلب ٧٧ ان

$$\frac{دص}{دس} = \sqrt{\frac{٢ح}{ص} - ١}$$

وبعد تربيع الطرفين يكون

$$\frac{دص^{٢}}{دس^{٢}} = \frac{٢ح}{ص} - ١$$

وباخذ التفاضل

$$٢ \frac{دص}{دس} \cdot \frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = - \frac{٢ح}{ص^{٢}} \frac{دص}{دس}$$

ومنه

$$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = - \frac{ح}{ص^{٢}}$$

فنصف قطر الانحناء يكون

$$نق = \frac{\left(\frac{٢ح}{ص}\right)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{ح}{ص^{٢}}} = ٢ \sqrt{٢ ح ص}$$

ولكن حيث ان (شكل ١٧) $\text{ج د}^{٢} = \text{د و} \times \text{د ب} = ٢\,\text{ح ص}$ فيكون

$\sqrt{٢\,\text{ح ص}} = \text{ج د}$ أعني ان نصف قطر الانحناء يساوى ضعف العمود على المماس

ونجد حينئذ مركز الانحناء بأخذ البعد $\text{ج جَ} = \text{ج د}$

٩٦ ـ اذا وضعنا مقداري $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ و $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ء س}^{٢}}$ السابقين في القانون الثاني من (ب) (المطلب ٩٧) نجد

$$\text{ص} - \text{و} = \frac{\frac{\text{ح}^{٢}}{\text{ص}}}{\frac{\text{ح}}{\text{ص}^{٢}}} = ٢\,\text{ص} \quad \text{ومنه} \quad \text{ص} = -\,\text{و}$$

ونجد أيضا

$$\text{س} - \text{ء} = -\,٢\,\text{ص}\sqrt{\frac{٢\,\text{ح}}{\text{ص}} - ١} = -\,٢\sqrt{٢\,\text{ح ص} - \text{ص}^{٢}}$$

$$\text{س} = \text{ء} - ٢\sqrt{-\,٢\,\text{ح و} - \text{و}^{٢}}$$

وبوضع هذه المقادير في معادلة السيكلويد يحدث

$$\text{ء} = \text{ح} \,.\, \text{قو جتا}\,\frac{\text{ح} + \text{و}}{\text{ح}} + \sqrt{-\,٢\,\text{ح و} - \text{و}^{٢}}$$

وهذه هي معادلة المنتشر

ويمكن وضعها على شكل أسهل من هذا ولذا ننسب المنتشر للمحورين

أَ سَ و أَ صَ الموازيين للمحورين الاصليين بفرض ان ابتداء الاصل

الجديد

الجديد اَ يكونان ح ȣ ر — ٢ بـ فنجد

$$ى = ح\ ȣ\ —\ س\ ر\ ر\ =\ —\ ٢\ ح\ +\ صَ$$

بفرض ان سَ ر صَ احداثيا النقطة جَ بالنسبة الى المحورين الجديدين فتؤول المعادلة السابقة الى

$$ح\ ȣ\ —\ سَ = ح\ \text{قو جتا}\ \frac{ح — صَ}{ح} + \sqrt{٢\ ح\ صَ — صَ^{٢}}$$

$$\text{أو}\ سَ = ح\ (ȣ — \text{قو جتا}\ \frac{ح — صَ}{ح}) — \sqrt{٢\ ح\ صَ — صَ^{٢}}$$

وحيث ان جيبي تمامي قوسين متكاملتين متساويان ومختلفان في العلامة فيحدث

$$ȣ — \text{قو جتا}\ \frac{ح — صَ}{ح} = \text{قو جتا}\ \frac{صَ — ح}{ح}$$

وتصير معادلة المنتشر

$$سَ = ح\ \text{قو جتا}\ \frac{ح — صَ}{ح} — \sqrt{٢ ح صَ — صَ^{٢}}$$

ويؤخذ من هنا ان منتشر السيكلويد هو سيكلويد آخر مثل الاول

٥٩٧ ملاحظة ان نصف قطر الانحناء في النقطة ا معدوم يحدث (شـ ١٧)

$$\text{قو ا جَ} = جَ ج = ٢ \sqrt{٢ ح صَ}$$

وحيث ان جَ طَ = ج ط = ص فاذا وضعنا اصل المحورين (ا سـ) و(ا صـ) في النقطة ا يتعين طول القوس ى = اجَ بالقانون

$$ى = ٢ \sqrt{٢ ح ص}$$

في النقطة اَ يكون ص = ٢ ح فيساوي حينئذ طول نصف السيكلويد ٤ ح

(تمرينات)

١ • المطلوب نصف قطر انحناء المنحنى السلسلى (١)

$$\text{ص} = \frac{\text{ح}}{٢}\left(\text{ه}^{\frac{\text{س}}{\text{ح}}} + \text{ه}^{-\frac{\text{س}}{\text{ح}}}\right)$$

الجواب

$$\text{نق} = \frac{\text{ص}^{٢}}{\text{ح}} = \text{طع}$$

(المنحنى السلسلى هو الشكل الذى يأخذه خيط متجانس لين غير قابل للتمدد طرفاه ثابتان)

٢ • المطلوب منتشر المنحنى

$$\text{س}^{\frac{٢}{٣}} + \text{ص}^{\frac{٢}{٣}} = \text{ح}^{\frac{٢}{٣}}$$

ونصف قطر انحنائه

الجواب نق $= ٣\,(\text{ح س ص})^{\frac{١}{٣}}$ ف $(\text{ء} + \text{د})^{\frac{٢}{٣}} + (\text{ء} - \text{د})^{\frac{٢}{٣}} = ٢\,\text{ح}^{\frac{٢}{٣}}$

٣ • المطلوب منتشر السيسويد (٢)

$$\text{ص}^{٢}(٢\text{ح} - \text{س}) - \text{س}^{٣} = ٠$$

ونصف قطر انحنائه

الجواب

$$٤٠٩٣\,\text{ح}^{٣}\,\text{ء} + ١١٥٢\,\text{ء}^{٢}\,\text{د}^{٢} + ٢٧\,\text{د}^{٤} = ٠$$

$$\text{نق} = \frac{\text{ح}\sqrt{\text{س}(٨\text{ح} - ٣\text{س})^{٣}}}{٣(٢\text{ح} - \text{س})^{٢}}$$

---

(١) اول من اشتغل بهذا المنحنى هو جاك بيرنولى وقد تقدم تاريخه

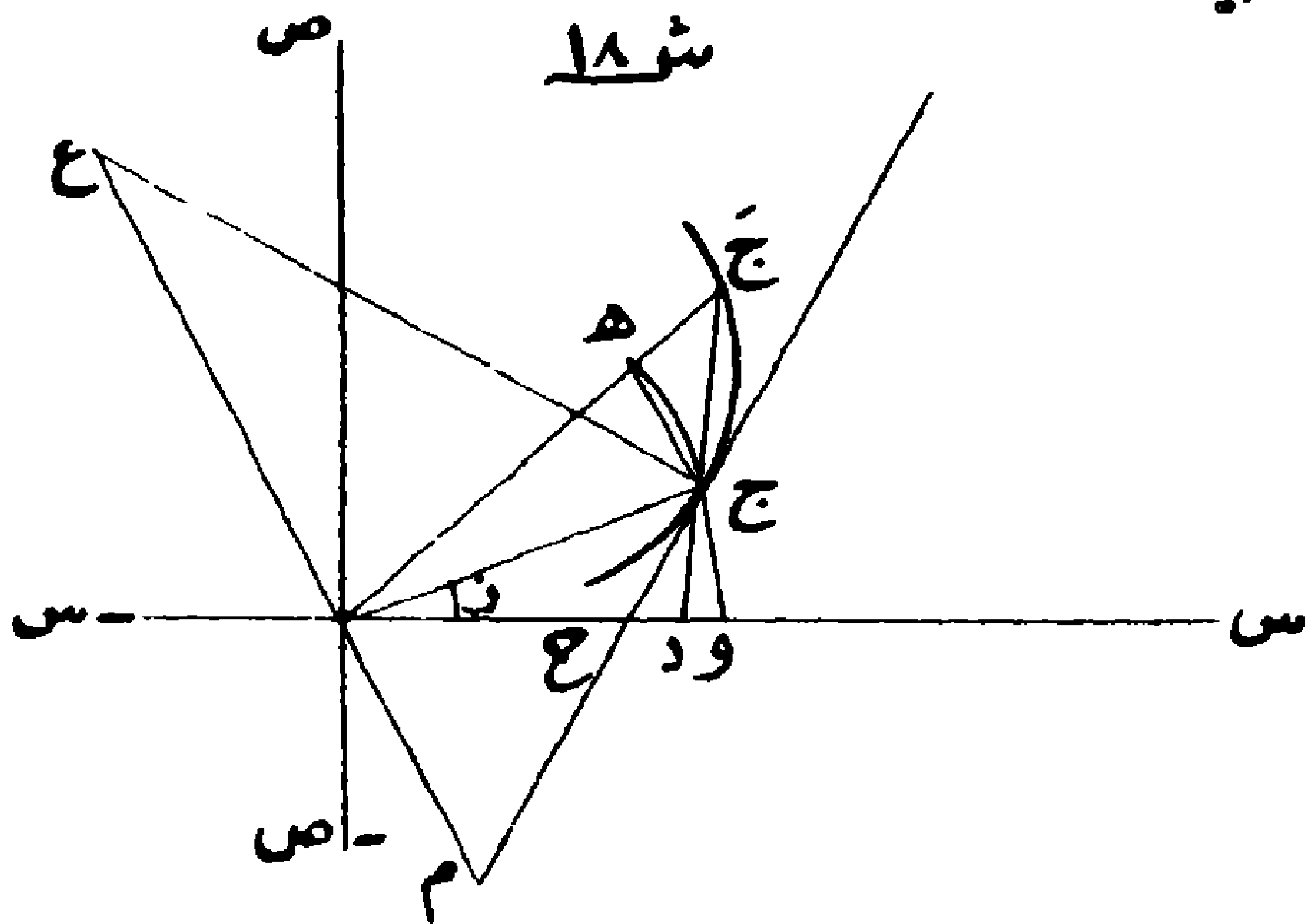
(٢) مخترع السيسويد هو ديوكليس اليونانى ويظن انه كان فى القرن السادس عشر من الميلاد

الباب الخامس عشر

في المنحنيات المرسومة بالنسبة للاحداثيات القطبية

٩٨ . اذا اخذنا (شـ ١٨) الاصل ا قطبا و ا س محورا قطبيا فوضع النقطة ج يتعين بمعرفة نصف القطر ا ج = نق، وللزاوية ى الحادثة بين نصف القطر المذكور والمحور

شـ ١٨



فنجد في المثلث ا ج د القائم الزاوية

$$ا د = ا ج . جتا ج ا د$$

$$ج د = ا ج \quad جا ج ا د$$

أعني

$$\left.\begin{array}{l} س = نق_{١} \; جتا \; ى \\ ص = نق_{١} \; جا \; ى \end{array}\right\} (١)$$

فاذا اريد تحويل المعادلة م (س ، ص) = ٠ المنسوبة لمحورين مستقيمين متعامدين الى معادلة منسوبة لاحداثيات قطبية يكفي ان نضع فيها مقداري س ، ص من (١) فيحدث

$$م (نق_{١} \; جتا \; ى ، نق_{١} \; جا \; ى) = ٠ \quad او \quad م (نق_{١} ، ى) = ٠$$

واذا كانت م(س، ص) = ٠ تحتوى على $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ و $\frac{\text{د}^{2}\text{ص}}{\text{دس}^{2}}$ فمقدارهما يوجد بواسطة المعادلتين (١) ولذا نفرض ان ز متغيرة مستقلة وان نق١ متعلقة بها فيحدث

$$\frac{\text{دس}}{\text{دز}}=\frac{\text{دنق}_{1}}{\text{دز}}\ \text{جتا ز}-\text{نق}_{1}\ \text{جا ز}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دز}}=\frac{\text{دنق}_{1}}{\text{دز}}\ \text{جا ز}+\text{نق}_{1}\ \text{جتا ز}$$

ومن هنا

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}=\frac{\frac{\text{دص}}{\text{دز}}}{\frac{\text{دس}}{\text{دز}}}=\frac{\frac{\text{دنق}_{1}}{\text{دز}}\ \text{جا ز}+\text{نق}_{1}\ \text{جتا ز}}{\frac{\text{دنق}_{1}}{\text{دز}}\ \text{جتا ز}-\text{نق}_{1}\ \text{جا ز}}$$

وبأخذ التفاضل مرة ثانية يكون

$$\frac{\text{د}^{2}\text{س}}{\text{دز}^{2}}=\frac{\text{د}^{2}\text{نق}_{1}}{\text{دز}^{2}}\ \text{جتا ز}-2\frac{\text{دنق}_{1}}{\text{دز}}\ \text{جا ز}-\text{نق}_{1}\ \text{جتا ز}$$

$$\frac{\text{د}^{2}\text{ص}}{\text{دز}^{2}}=\frac{\text{د}^{2}\text{نق}_{1}}{\text{دز}^{2}}\ \text{جا ز}+2\frac{\text{دنق}_{1}}{\text{دز}}\ \text{جتا ز}-\text{نق}_{1}\ \text{جا ز}$$

٣٠

ويوضع هذه المقادير فى القانون (٥) من المطلب يحدث

$$\frac{\text{د}^{2}\text{ص}}{\text{دس}^{2}}=\frac{\text{نق}_{1}^{2}+2\frac{\text{دنق}_{1}^{2}}{\text{دز}^{2}}-\text{نق}_{1}\frac{\text{د}^{2}\text{نق}}{\text{دز}^{2}}}{\left(\frac{\text{دنق}_{1}}{\text{دز}}\ \text{جتا ز}-\text{نق}_{1}\ \text{جا ز}\right)}$$

وهو المطلوب

(في المماس وتحته وتحت العمود)

٥٩٩ بتعيين المماس جم (شـ ١٨) للمنحنى جج' في النقطة ج بمعرفة الزاوية ج ح س الناتجة من تلاقيه بالمحور القطبي فاذا رمزنا لها بالحرف شـ يكون

$$\text{طا}\,\text{ش} = \frac{\text{ء}\,\text{ص}}{\text{ء}\,\text{س}} = \frac{\frac{\text{ء}\,\text{نق}_1}{\text{ء}\,\text{ز}}\,\text{حا}\,\text{ز} + \text{نق}_1\,\text{حتا}\,\text{ز}}{\frac{\text{ء}\,\text{نق}_1}{\text{ء}\,\text{ز}}\,\text{حتا}\,\text{ز} - \text{نق}_1\,\text{حا}\,\text{ز}}$$

$$= \frac{\text{طا}\,\text{ز} + \text{نق}_1\,\frac{\text{ء}\,\text{ز}}{\text{ء}\,\text{نق}_1}}{1 - \text{نق}_1\,\frac{\text{ء}\,\text{ز}}{\text{ء}\,\text{نق}_1}\,\text{طا}\,\text{ز}}$$

واذا اريد معرفة الزاوية ا ج م = ضـ الحادثة بين المماس ونصف قطر نقطة التماس نجد

$$\text{ض} = \text{ش} - \text{ز} \qquad \text{طا}\,\text{ض} = \frac{\text{طا}\,\text{ش} - \text{طا}\,\text{ز}}{1 + \text{طا}\,\text{ش}\,\text{طا}\,\text{ز}}$$

وبوضع مقدار طا شـ في المعادلة الاخيرة يحدث

$$\text{طا}\,\text{ض} = \text{نق}_1\,\frac{\text{ء}\,\text{ز}}{\text{ء}\,\text{نق}_1}$$

وهو المطلوب

وبطريقة أخرى نأخذ نقطة ثانية ج' على المنحنى المفروض معينة بالاحداثين نق + ف نق ، ز + ف ز فاذا جعلنا اه = اج ينتج

$$\text{ج}'\text{ه} = \text{ف}\,\text{نق} \qquad \text{ج}\,\text{ا}\,\text{ج}' = \text{نق}_1\,\text{ف}\,\text{ز}$$

وفى المثلث ج هـ جَ يحدث

$$\frac{جا(جَ ج هـ)}{جا(ج جَ هـ)} = \frac{جَ هـ}{ج هـ} = \frac{ج هـ}{نق ف نـ_{١}} \cdot \frac{نق ف نـ_{١}}{ف نق_{١}}$$

فاذا فرضنا ان النقطة جَ تقرب جدا من ج فتقرب الزاوية ج جَ هـ أى دجَ ا من الزاوية م ج ا = ضـ والزاوية ج هـ جَ من الزاوية القائمة فنهاية الزاوية جَ ج ا تكون حينئذ ٩٠° ــ ضـ ومن جهة أخرى قد علم ان نهاية نسبة ا الوتر ج هـ للقوس نق × ف نـ يكون واحدا فاذا يصير

$$طا ضـ = نق_{١} \frac{6 نـ}{6 نق_{١}}$$

وهو المطلوب

١٠٦ ليكن خط ع م عمودا على نصف القطر ا ج فالفصل ا م المحصور بين القطب ا ونقطة تلاقى العمود المذكور بالماس يسمى تحت المماس والخط ا ع المحصور بين ا ونقطة تلاقيه بالعمود ج ع يسمى تحت العمود فاذا اعتبرنا المثلث ج ا م نجد ان

$$ام = اج طا اجم \quad ، \quad جم = \sqrt{\overline{اج}^2 + \overline{ام}^2}$$

أعنى ان

$$تم = نق_{١}^2 \frac{6 نـ}{6 نق_{١}} \quad ، \quad ظم = نق_{١} \sqrt{١ + نق^2 \frac{6 نـ^2}{6 نق_{١}^2}}$$

وباعتبار المثلث ا ج ع يحدث

$$اع = \frac{اج}{طا اع ج} \quad ، \quad ج ع = \sqrt{\overline{اج}^2 + \overline{اع}^2}$$

او $\quad$ تع $= \frac{1}{\text{ء س}}$ و طع $= \sqrt{\text{نق}^{2}_{1} + \frac{\text{ء نق}^{2}}{\text{ء س}^{2}}}$

(فى تفاضل قوس المنحنى)

١٠١ لايجاد تفاضل القوس ق لمنحنى مفروض يكفى ان نضع فى القانون المعلوم

$$\text{ءق} = \sqrt{\text{ء س}^{2} + \text{ء ص}^{2}}$$

مقدارى ءس و ءص السابقين فيحدث

$$\text{ءق} = \sqrt{\text{ء نق}^{2}_{1} + \text{نق}^{2}_{1}\,\text{ء س}^{2}}$$

ويمكن أيضا الاستحصال على هذا القانون باعتبار المثلث ح هح لانه نجد فيه

$$\overline{\text{ح ح}'}^{2} = \overline{\text{ح ه}}^{2} + \overline{\text{ح' ه}}^{2} - 2\ \text{ح ه} \cdot \text{ح' ه}\ \text{جتا ح ا ح'}$$

$$\left(\frac{\text{ح ح'}}{\text{ه}}\right)^{2} = 1 + \left(\frac{\text{ح' ه}}{\text{ح ه}}\right)^{2} - 2\,\frac{\text{ح' ه}}{\text{ح ه}}\ \text{جتا ح ه ح'}$$

فاذا لاحظنا ان

$$\text{نها ح' ه ح} = 90^{\circ} \text{ و } \text{نها} \frac{\text{وتر (ح ح')}}{\text{وتر (ح' ه)}} = \text{نها} \frac{\text{قوس (ح ح')}}{\text{قوس (ح' ه)}} = \text{نها} \frac{\text{ف ق}}{\text{نق}_{1}\ \text{ف س}}$$

تؤول المعادلة الاخيرة الى

$$\frac{\text{ءق}^{2}}{\text{نق}^{2}_{1}\,\text{ء س}^{2}} = 1 + \frac{\text{ء نق}^{2}_{1}}{\text{نق}^{2}_{1}\,\text{ء س}^{2}}$$

ومنه $\quad \text{ءق}^{2} = \text{ء نق}^{2}_{1} + \text{نق}^{2}_{1}\,\text{ء س}^{2}$

وهو المطلوب

(فى مركز الانحناء ونصف قطره)

١٠٢ اذا وضعنا مقدارى $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ و $\frac{\text{ء}^{2}\text{ص}}{\text{ء س}^{2}}$ السابقين بالطلب[98] فى القانون

المعلوم

$$\text{نق} = \pm \frac{\left(1 + \frac{\text{ء ص}^2}{\text{ء س}^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ء س}^2}}$$

نجد

$$\text{نق} = \pm \frac{\left(\text{نق}_1^2 + \frac{\text{ء نق}_1^2}{\text{ء ر}^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\text{نق}_1^2 + 2\,\frac{\text{ء نق}_1^2}{\text{ء ر}^2} - \text{نق}_1\,\frac{\text{ء}^2\text{نق}_1}{\text{ء ر}^2}}$$

فبواسطة هذا القانون يتعين نصف قطر الانحناء وموضع مركزه على العمود

ويمكن التحصيل عليه بطريقة أخرى سهلة وهي ان يقال قد علم في المطالب [96] ان

$$\text{نق} = \frac{\text{ء ن}}{\text{ء ل}}$$

وفي المطالب [107] ان

$$\text{طا ض} = \text{طا}\,(\text{س} - \text{ر}) = \text{نق}_1\,\frac{\text{ء ر}}{\text{ء نق}_1}$$

ومنه $\text{طتا}\,(\text{س} - \text{ر}) = \frac{1}{\text{نق}_1}\,\frac{\text{ء نق}_1}{\text{ء ر}}$ و $\text{س} = \text{ر} + \text{قو طتا}\,\frac{1}{\text{نق}_1}\,\frac{\text{ء نق}_1}{\text{ء ر}}$

وبأخذ التفاضل يكون

$$\text{ء س} = \text{ء ر} - \frac{\text{ء}\left(\frac{1}{\text{نق}_1}\,\frac{\text{ء نق}_1}{\text{ء ر}}\right)}{1 + \frac{1}{\text{نق}_1^2}\,\frac{\text{ء نق}_1^2}{\text{ء ر}^2}} = \text{ء ر} - \frac{\text{نق}_1\,\frac{\text{ء}^2\text{نق}_1}{\text{ء ر}^2} - \frac{\text{ء نق}_1^2}{\text{ء ر}^2}}{\text{نق}_1^2 + \frac{\text{ء نق}_1^2}{\text{ء ر}^2}}\,\text{ء ر}$$

=

$$= \frac{\text{نق}_1^2 + 2\,\frac{\text{ف نق}^2}{\text{ف ز}^2} - \text{نق}_1\,\frac{\text{ف}^2\text{نق}}{\text{ف ز}^2}}{\text{نق}_1^2 + \frac{\text{ف نق}^2}{\text{ف ز}^2}}\ \text{ف ز}$$

فاذا لاحظنا ان ل = س ووضعنا فى القانون

$$\text{نق} = \frac{\text{ف ح}}{\text{ف س}}$$

بدلا عن فس المقدار السابق وبدلا عن فح ما ساواه (المطلب ١٠١) يحدث

$$\text{نق} = \frac{\left(\text{نق}_1^2 + \frac{\text{ف نق}^2}{\text{ف ز}^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\text{نق}_1^2 + 2\,\frac{\text{ف نق}^2}{\text{ف ز}^2} - \text{نق}_1\,\frac{\text{ف}^2\text{نق}}{\text{ف ز}^2}}$$

وهو المطلوب

(تطبيقات)

فى المنحنيات ذات الدرجة الثانية

١٠٣ اذا أخذنا احدى البورتين قطبا والمحور البورى محورا قطبيا فمعادلة المنحنى تكون

$$\frac{1}{\text{نق}_1} = \frac{1 - \text{لا جتا ز}}{\text{ع}}$$

بفرض ان (لا) هى الاختلاف المركزى فباخذ تفاضلها مرتين يحدث

$$\frac{1}{\text{نق}_1^2}\,\frac{\text{ف نق}}{\text{ف ز}} = -\,\frac{\text{لا جا ز}}{\text{ع}}$$

وبوضع $\frac{1}{4}-\frac{1}{\text{نق}_1}$ عوضا عن $\frac{\text{لا جتا ز}}{\text{ع}}$ تؤل المعادلة الاخيرة الى

$$\frac{1}{\text{نق}_1^2}\,\frac{\text{د}^2\text{نق}}{\text{د ز}^2}-\frac{2}{\text{نق}_1^3}\,\frac{\text{د}^2\text{نق}}{\text{د ز}^2}=\frac{1}{\text{نق}_1}=\frac{1}{\text{ع}}$$

وبضرب الطرفين فى نق_1^3 يحدث

$$\text{نق}_1^3+2\,\frac{\text{د}^2\text{نق}}{1\,\text{د ز}^2}-\text{نق}_1\,\frac{\text{د}^2\text{نق}}{1\,\text{د ز}^2}=\frac{\text{نق}^3}{\frac{1}{\text{ع}}}$$

فيكون حينئذ نصف قطر الانحناء

$$\text{نق}=\frac{\left(\text{نق}^2+\frac{\text{لا}^2\,\text{نق}^4}{\text{ع}^2}\,\text{حا}^2\text{ز}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\text{نق}^3}{\frac{1}{\text{ع}}}}=\text{ع}\left(1+\frac{\text{لا}^2\,\text{نق}^2\,\text{حا}^2\text{ز}}{\text{ع}^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

ونجد ايضا

$$\text{طا ض}=(\text{طا س}-\text{ز})=-\frac{\text{ع}}{\text{لا نق}_1\,\text{حا ز}}$$

ومنها

$$\text{ظتا}\,(\text{س}-\text{ز})=\frac{\text{لا نق}_1\,\text{حا ز}}{\text{ع}}$$

فاذا يكون (شكل ١٩)

$$\text{طا ب ح ع}=\text{طا ب ج م}=\text{طا}\,(\text{ز}-\text{س})=\frac{\text{لا نق}_1\,\text{حا ز}}{\text{ع}}$$

واذا

ش ١٩

فاذا رمزنا بالحرف ى للزاوية ب ج ع يحدث

$$\text{طا ى} = \frac{\text{لا نق}_1 \text{ حا ن}}{\text{ع}} \quad \text{و} \quad \text{حتا ى} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\text{لا}^2 \text{ نق}_1^2 \text{ حا}^2 \text{ ن}}{\text{ع}^2}}}$$

فنصف قطر الانحناء يكون حينئذ

$$\text{نق} = \frac{\text{ع}}{\text{حتا}^3 \text{ ى}}$$

وبمقارنة هذا القانون بما وجدناه فى المطلب ١٠٠ يحدث

$$\frac{\text{ع}}{\text{حتا}^3\text{ى}} = \frac{\text{طع}^3}{\text{ع}^2} \quad \text{ومنه} \quad \text{ع} = \text{طع حتا ى}$$

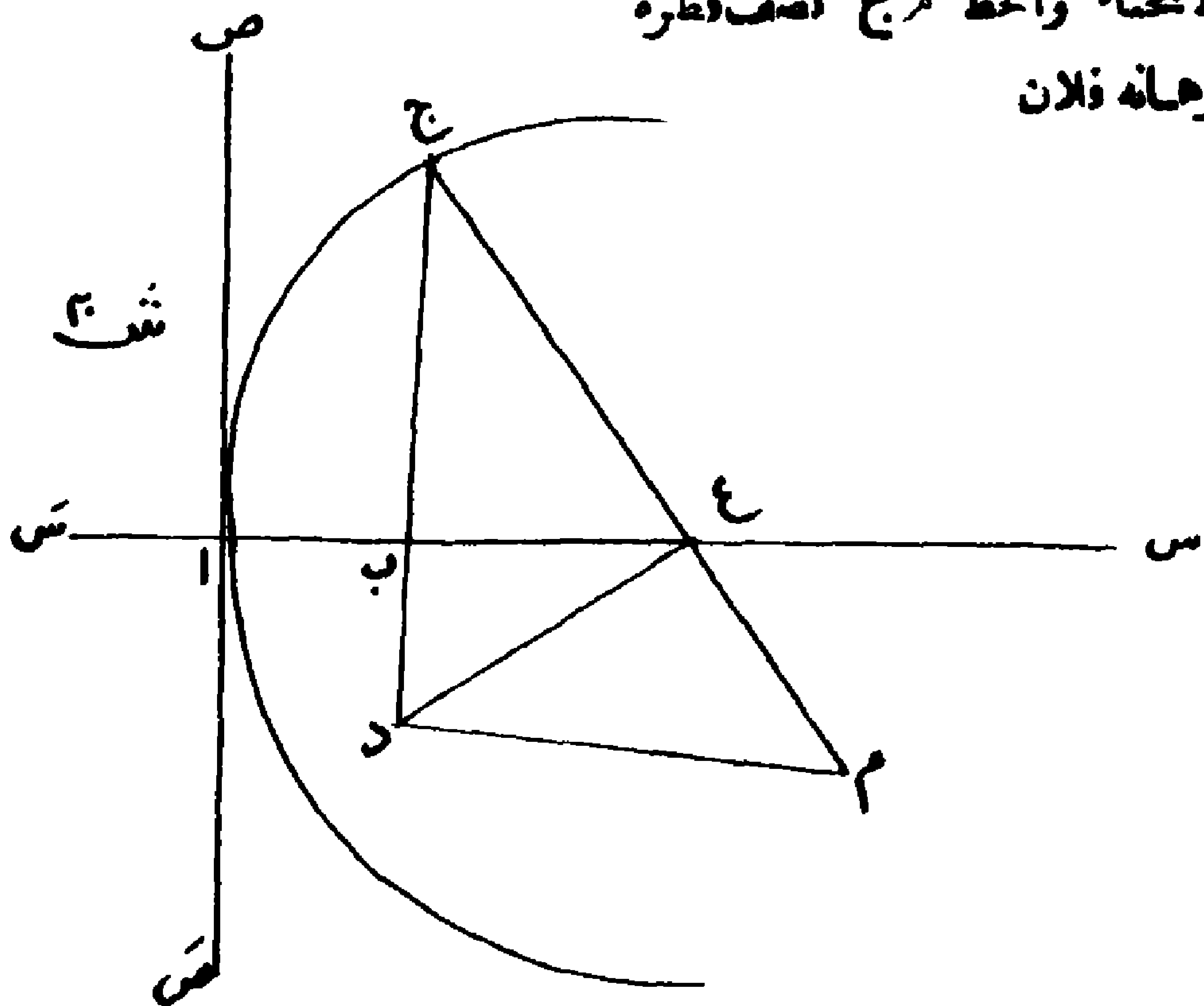
اعنى ان مسقط العمود ج ع على نصف القطر البورى كمية ثابتة تساوى نصف العيار ع (١)

---

١) تنسب هذه النظرية لباجيز المتوفى بالتخمين فى الثورة الفرنساوية التى كانت سنة ١٨٤٨

١٠٤ يمكن بواسطة القانون السابق تعيين نصف قطر الانحناء بالرسم ولذا نقيم ع د (ش ٢٠) عمودا على العمود ج ع ومن نقطة تلاقيه د بنصف القطر البورى ج ب نخرج د م عمودا على ج ب فالنقطة م تكون مركز الانحناء والخط م ج نصف قطره

برهانه فلان



$$ج د = \frac{ج ع}{جماى} = \frac{ط ع}{جماى} \quad و \quad ج م = \frac{ج د}{جماى} = \frac{ط ع}{جماى^{٢}}$$

فيكون

$$ج م = نق$$

وهو ما اردنا ان يثبت

فى حلزون ارشميدس (١)

١٠٥ لتكن ب ج (ش ٢١) دائرة مركزها القطب ا ونصف قطرها ب

(١) ارشميدس هو احد فحول اليونان فى الرياضيات ولد سنة ٢٨٧ ومات سنة ٢١٢ قبل الميلاد

فاذا اخذنا على نصف القطر البورى اج البعد اد مساويا للقوس بج يكون مسير النقطة د الهندسى منحنيا يسمى بحلزون ارشميدس

ش ٢١

لنرمز بالحرف ى للزاوية ب ا ج فيكون قوس ب ح = جـ ى ومنه

$$\text{اد} = \text{نق}_1 = \text{جـ}\,\text{ى}$$

وهى معادلة الحلزون وبأخذ التفاضل يحدث $\frac{ء\,\text{نق}_1}{ء\,\text{ى}} = \text{جـ}$ فاذا يكون

$$\text{طا ضـ} = \text{طا ادم} = \text{نق}\,\frac{ء\,\text{ى}}{ء\,\text{نق}_1} = \frac{\text{نق}}{\text{جـ}} = \text{ى}$$

ومن هنا ينتج ان ظا ضـ يكبر جدا كلما زادت ى فنهاية الزاوية ضـ تكون حينئذ ٩٠ درجة وفى القطب ا تكون ى معدومة وكذا ضـ فالمحور اس يمس المنحنى فى هاته النقطة ونجد أيضا ان

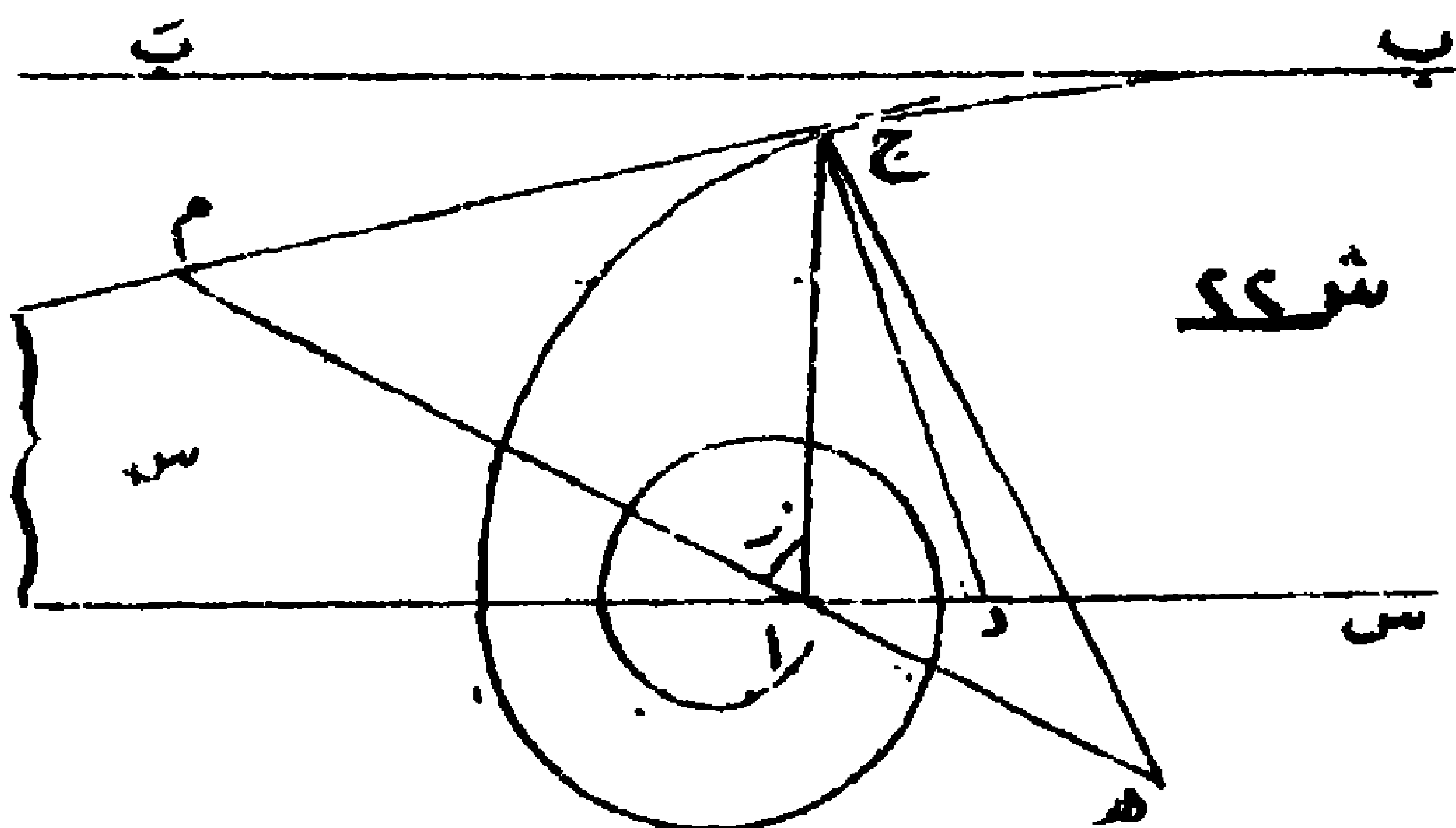
$$\text{تم} = \text{ام} = \frac{\text{نق}_1^2\,ء\,\text{ى}}{ء\,\text{نق}_1} = \text{جـ}\,\text{ى}^3 = \frac{\text{نق}_1^2}{\text{جـ}}$$

$$\text{تع} = \text{اه} = \frac{ء\,\text{نق}_1}{ء\,\text{ى}} = \text{جـ}$$

فيتبين من ذلك ان تحت العمود كمية ثابتة مساوية لنصف القطر جـ ومن هذا نستخرج طريقة سهلة لرسم المماس فى أى نقطة من الحلزون

(فى الحلزون الهذلولى)

١٠٦ سمى هذا المنحنى كذا لان معادلته القطبية وهى $\text{نق}_1 \, \text{ى} = \text{ج}$ تشابه معادلة القطع الزائد المنسوب لخطيه التقريبين وهو منحنى يدور من جهة حول القطب (ا) ويقرب جدا منه ولذا سميت النقطة ا بنقطة التقرب ومن أخرى يقرب من خط تقربى وهو ب بَ (ش ٢٢) مواز للمحور اس وبعده منه يساوى نصف القطر نق_1 لان $\text{جد} = \text{نق}_1 \, \text{جا ى} = \frac{\text{ج جا ى}}{\text{ى}}$ وهى كمية اصغر من ج لكن تقرب جدا منها كلما انقصت ى



فيكون $\text{نق}_1 = \frac{\text{ج}}{\text{ى}}$ ، $\frac{\text{د نق}_1}{\text{د ى}} = -\frac{\text{ج}}{\text{ى}^2} = -\frac{\text{نق}_1^2}{\text{ج}}$

ومنها $\text{ظا ص} = \text{ظا} \left(\text{س} - \text{ى}\right) = \text{نق} \frac{\text{د ى}}{\text{د نق}_1} = -\text{ى}$

$\text{تم} = \text{نق}_1^2 \frac{\text{د ى}}{\text{د نق}_1} = -\text{ج}$

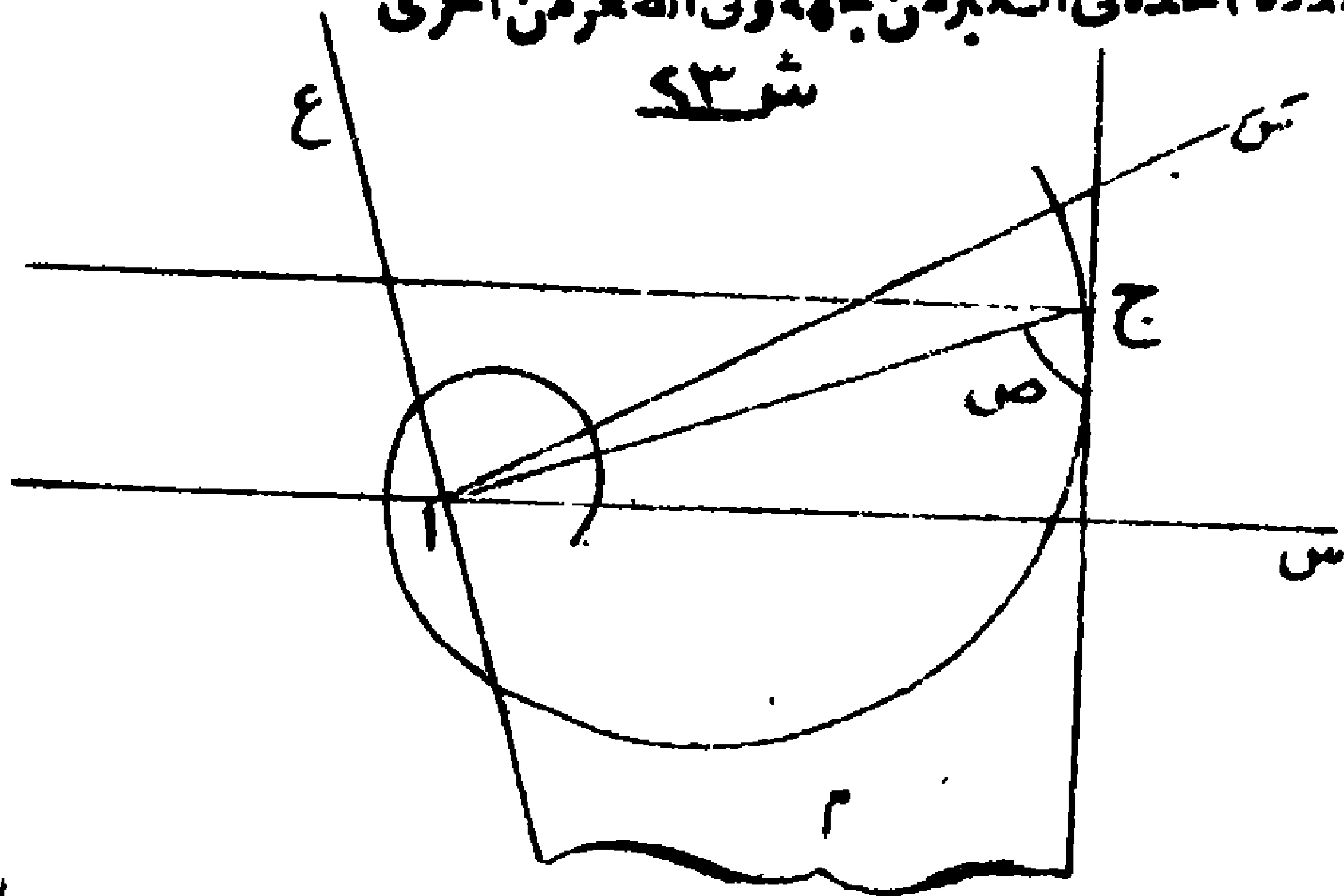
أعنى ان تحت المماس كمية ثابتة ومن هذا تستخرج طريقة سهلة لرسم المماس فى نقطة ما للمنحنى

(فى الحلزون اللوغاريتمى)

١٠٧ معادلة هذا المنحنى هى $ن = لغا \frac{نق}{م}$ واذا فرضنا ان ح اساس اللوغاريتم يمكن كتابتها

$$نق_١ = م ح^{ن}$$

فاذا جعلنا ن = ٠ يكون نق$_١$ = ح وحيث ان ح عدد موجب اكبر من الواحد فاذا ازادت ن بزيادات موجبات يأخذ نق مقادير اكبر من ح واذا ازادت ن بزيادات سالبات يأخذ نق مقادير أصغر من ح ويقرب جدا من الصغر فالمنحنى (شـ ٢٣) يكون حينئذ متركبا من حلزونات متعددة آخذة فى الكبر من جهة وفى الصغر من أخرى



لنأخذ تفاضل المعادلة نق$_١$ = م ح^{ن} مرتين فنجد

$$\frac{ى نق_١}{ى ن} = م لع ح . ح^{ن} = نق لع ح$$

$$\frac{ى^٢ نق_١}{ى ن^٢} = م (لع ح)^٢ ح^{ن} = نق_١ (لع ح)^٢$$

فاذا يكون

$$طا ض = نق_١ \frac{ى ن}{ى نق} = \frac{١}{لع ح}$$

اعنى ان زاوية المماس ونصف القطر البورى فى أى نقطة من المنحنى كمية ثابتة

ونجد أيضا ان $تم = \frac{نقَ_١}{لع ح} × تع = نقَ_١ لع ح$

فيكون حينئذ

$$طع = \sqrt{نقَ_١^٢ + نقَ_١^٢ (لع ح)^٢} = نقَ_١ \sqrt{١ + (لع ح)^٢}$$

وأيضا

$$نق = \frac{[نقَ_١^٢ + نقَ_١^٢ (لع ح)^٢]^{\frac{٣}{٢}}}{نقَ_١^٢ + ٢ نقَ_١^٢ (لع ح)^٢ - نقَ_١^٢ (لع ح)^٢} = نقَ_١ \sqrt{١ + (لع ح)^٢}$$

اعنى ان نصف قطر الانحناء يساوى العمود فاذا جعلنا (شكل ٢٣) $١ ع = نقَ_١$

$= نقَ_١ لع ح$ و $نَ = \frac{ط}{٢} + ن$ يكون $نقَ_١$ و $نَ$ احداثى النقطة ع وهى مركز انحناء الحلزون المقابل للنقطة ج وينتج من المعادلتين

السابقتين $نقَ_١ = \frac{نقَ_١}{لع ح}$ و $ن = نَ - \frac{ط}{٢}$

فاذا وضعنا هذين المقدارين فى معادلة المنحنى يحدث

$$نقَ_١ = م لع ح . ح^{نَ - \frac{ط}{٢} + لغا (لغ ح)} = م ح^{نَ - \frac{ط}{٢}}$$

وهى معادلة المنتشر

واذا أخذنا اس محورا قطبيا بفرض ان الزاوية الحادثة بينه وبين اس تعادل $\frac{ط}{٢}$ — لغا (لع ح) ثم رمزنا بالرمز $نً$ للزاوية س اع يحدث

$$نً = نَ - [\frac{ط}{٢} - لغا (لع ح)]$$

فتصير معادلة المنتشر

$$نقَ_١ = م ح^{نً}$$

أعنى ان منتشر الحلزون اللوغارتمى هو حلزون لوغارتمى آخر يساوى الاول

واذا فرضنا ان $ح = \infty$ يكون $لع \infty = ١$ و $لع (لع \infty) = ٠$

ويستفاد من هنا ان محور الحلزون ومحور منتشره متعامدان

(تمرين)

(تمرين)

لتكن نق، = ٢ ﺟ (١ + حتا ﺣ) معادلة الكارديويد فنجد

$$\text{طا ض} = - \text{طتا} \frac{\text{ﺣ}}{٢} \quad \text{ومنها} \quad \text{ض} = \frac{\text{ط} + \text{ﺣ}}{٢}$$

فبهذا يسهل رسم المماس ونجد ايضا

$$\text{تم} = -\text{نق طتا} \frac{\text{ﺣ}}{٢} \quad \text{و} \quad \text{تع} = -٢ \text{ ﺟ حا ﺣ}$$

$$\text{طم} = \frac{\text{نق}_١}{\text{حا} \frac{\text{ﺣ}}{٢}} \qquad \text{وطع} = \frac{\text{نق}_١}{\text{حتا} \frac{\text{ﺣ}}{٢}}$$

الباب السادس عشر

(فى التفاضلات الجزئية والكلية للمتعلقات بعدة متغيرات مستقلة)

١٠٨ · لتكن ط = م (س و ص) متعلقة بمتغيرين مستقلين س و ص فاذا اخذنا مشتقتها بالنسبة الى س باعتبار ص كمية ثابتة تسمى هذه المشتقة المشتقة الجزئية بالنسبة الى س ويرمز لها بالرمز

$$\frac{\partial \text{ط}}{\partial \text{س}} \quad \text{او} \quad \frac{\partial \text{م(س و ص)}}{\partial \text{س}} \quad \text{او} \quad \frac{\partial \text{م}}{\partial \text{س}} \quad \text{او} \quad \bar{\text{م}}_{\text{س}} \text{(س و ص)}$$

وبضربها فى ∂ س نجد التفاضل الجزئى وهو

$$\frac{\partial \text{ط}}{\partial \text{س}} \partial \text{س} \quad \text{او} \quad \frac{\partial \text{م(س و ص)}}{\partial \text{س}} \partial \text{س} \quad \text{او} \quad \frac{\partial \text{م}}{\partial \text{س}} \partial \text{س} \quad \text{او} \quad \bar{\text{م}}_{\text{س}} \text{(س و ص)} \partial \text{س}$$

يرمز بمثل هذا للمشتقة الجزئية وللتفاضل الجزئى بالنسبة الى ص

(تنبيه) حيث ان ∂ ط فى $\frac{\partial \text{ط}}{\partial \text{س}}$ تدل على مشتقة ط بالنسبة الى س وفى $\frac{\partial \text{ط}}{\partial \text{ص}}$ تدل على مشتقتها بالنسبة الى ص فمقدارها يختلف فى الكميتين

السابقتين واذا لا ينبغى اختصار التفاضلين

$$\frac{\partial \text{ط}}{\partial \text{س}}\partial \text{س} \quad \text{و} \quad \frac{\partial \text{ط}}{\partial \text{ص}}\partial \text{ص}$$

لاجل عدم الايهام

١٠٩. اذا زدت المستقلتان س و ص بالزيادتين ف س و ف ص يكون كما هو واضح

$$\text{ف ط} = \text{م}(\text{س} + \text{ف س و ص} + \text{ف ص}) - \text{م}(\text{س و ص})$$

و بموجب ما تقدم فى المطلب ٩ يحدث

$$\partial \text{ط} = [\text{م}'_{\text{س}}(\text{س و ص}) + \text{د}]\ \text{ف س} + [\text{م}'_{\text{ص}}(\text{س} + \text{ف س و ص}) + \text{ذ}']\ \text{ف ص}$$

بفرض د و ذ' كميتين تنعدمان مع ف س و ف ص وحيث ان

$$\text{مها}\ \text{م}'_{\text{س}}(\text{س} + \text{ف س و ص}) = \text{م}'_{\text{س}}(\text{س و ص})$$

يمكن ان يكتب

$$\text{م}'_{\text{س}}(\text{س} + \text{ف س و ص}) = \text{م}'_{\text{س}}(\text{س و ص}) + \text{ذ}'$$

بفرض ان ذ' تنعدم مع ف س . فاذا جعلنا ذ + ذ' = د' تؤول المعادلة السابقة الى

$$\text{ف ط} = \text{م}'_{\text{س}}(\text{س و ص})\ \text{ف س} + \text{م}'_{\text{ص}}(\text{س و ص})\ \text{ف ص} + \text{د ف س} + \text{د}'\ \text{ف ص}$$

او

$$\text{ف ط} = \frac{\partial \text{ط}}{\partial \text{س}}\ \text{ف س} + \frac{\partial \text{ط}}{\partial \text{ص}}\ \text{ف ص} + \text{د ف س} + \text{د}'\ \text{ف ص}$$

فاذا اعتبرنا ف س و ف ص كميتين صغيرتين جدا ورمزنا لهما بالرمزين

∂س و ∂ص

يسمى حاصل الجمع وهو

$$\frac{د ط}{د س} د س + \frac{د ط}{د ص} د ص$$

تفاضل المتعلقة ط الكلى ويرمز له بالرمز د ط فيكون حينئذ

$$د ط = \frac{د ط}{د س} د س + \frac{د ط}{د ص} د ص$$

وعموما لو كانت ط = م (س و ص و ع و ٠٠٠٠٠) لوجدنا

$$د ط = \frac{د ط}{د س} د س + \frac{د ط}{د ص} د ص + \frac{د ط}{د ع} د ع + ٠٠٠٠٠٠$$

وينتج من هذا ان التفاضل الكلى لمتعلقة بجملة مستقلات يساوى حاصل جمع تفاضلاتها الجزئية بالنسبة لكل من المستقلات ليكن مثلا

$$ط = س ص + س ع + ص ع$$

فنجد

$$\frac{د ط}{د س} = ص + ع ، \frac{د ط}{د ص} = س + ع ، \frac{د ط}{د ع} = س + ص$$

ومنها

$$\frac{د ط}{د س} د س = (ص + ع) د س ، \frac{د ط}{د ص} د ص = (س + ع) د ص ، \frac{د ط}{د ع} د ع = (س + ص) د ع$$

وهى التفاضلات الجزئية فالتفاضل الكلى يكون حينئذ

$$د ط = (ص + ع) د س + (س + ع) د ص + (س + ص) د ع$$

وهو المطلوب

(فى التفاضلات الجزئية والكلية للمتعلقات المضمرة)

١١٠ · لتكن المعادلة م (س و ص و ط) = ٠ المفروض فيها ان ط متعلقة بالمستقلتين س و ص ولنجعل

$$ع = م (س و ص و ط)$$

فبناء على ما تقدم يكون

$$د ع = \frac{د م}{د س} د س + \frac{د م}{د ص} د ص + \frac{د م}{د ط} د ط$$

وحيث ان ع = ٠ يكون د ع = ٠ وتؤول المعادلة السابقة الى

$$\frac{\partial م}{\partial س}\partial س + \frac{\partial م}{\partial ص}\partial ص + \frac{\partial م}{\partial ط}\partial ط = ٠$$

ومنها

$$\partial ط = -\frac{\frac{\partial م}{\partial س}}{\frac{\partial م}{\partial ط}}\partial س - \frac{\frac{\partial م}{\partial ص}}{\frac{\partial م}{\partial ط}}\partial ص$$

وهو تفاضل ط الكلي

وبمقارنة هذه المعادلة بالمعادلة

$$\partial ط = \frac{\partial ط}{\partial س}\partial س + \frac{\partial ط}{\partial ص}\partial ص$$

نجد ان

$$\frac{\partial ط}{\partial س} = -\frac{\frac{\partial م}{\partial س}}{\frac{\partial م}{\partial ط}} \quad ، \quad \frac{\partial ط}{\partial ص} = -\frac{\frac{\partial م}{\partial ص}}{\frac{\partial م}{\partial ط}}$$

اعني ان مشتقي ط الجزئيين تتعين بواسطة المعادلتين

$$\frac{\partial م}{\partial ط}\frac{\partial ط}{\partial س} + \frac{\partial م}{\partial س} = ٠ \quad ، \quad \frac{\partial م}{\partial ط}\frac{\partial ط}{\partial ص} + \frac{\partial م}{\partial ص} = ٠$$

الناتجتين من اخذ تفاضل المعادلة المفروضة م (س و ص و ط) = ٠ بالنسبة لكل من المستقلين س و ص ليكن مثلا

$$\frac{س^2}{ا^2} + \frac{ص^2}{ب^2} + \frac{ط^2}{ج^2} - ١ = ٠$$

فنجد

$$\frac{س}{ا^2}\partial س + \frac{ص}{ب^2}\partial ص + \frac{ط}{ج^2}\partial ط = ٠$$

ومنها

$$ءط = -\frac{ح^{2}\,س}{أ^{2}\,ط}\,ءس - \frac{ح^{2}\,ص}{ب^{2}\,ط}\,ءص$$

هو التفاضل الكلى واما المشتقتان الجزئيتان فهما

$$\frac{ءط}{ءس} = -\frac{ح^{2}\,س}{أ^{2}\,ط} \quad و \quad \frac{ءط}{ءص} = -\frac{ح^{2}\,ص}{ب^{2}\,ط}$$

وهو المطلوب

(فى التفاضلات الجزئية ذات المراتب المختلفة للمتعلقات بجملة مستقلات)

١١١ لتكن $ط = م\,(س \; و \; ص)$ متعلقة بالمستقلتين س و ص فاذا لاحظنا ان مشتقتيها الجزئيتين $\frac{ءط}{ءس}$ و $\frac{ءط}{ءص}$ متعلقتان أيضا بالمتغيرتين س و ص يمكن أخذ مشتقاتهما بالنسبة لكل من هاتين المستقلتين فنجد المشتقات الجزئية ذات المرتبة الثانية وهى

$$\frac{ء^{2}ط}{ءس^{2}} \;,\; \frac{ء\frac{ءط}{ءس}}{ءص} \;,\; \frac{ء\frac{ءط}{ءص}}{ءس} \;,\; \frac{ء^{2}ط}{ءص^{2}}$$

الاشارة $\frac{ء\frac{ءط}{ءس}}{ءص}$ تدل على الناتج من أخذ مشتقة ط بالنسبة الى س ثم مشتقة هذه المشتقة بالنسبة الى ص ولاجل الاختصار تكتب $\frac{ء^{2}ط}{ءس\,ءص}$

وكذا يكتب $\frac{ء^{2}ط}{ءص\,ءس}$ عوضا عن $\frac{ء\frac{ءط}{ءص}}{ءس}$ فمشتقات ط ذات المرتبة الثانية تكون حينئذ

$$\frac{ء^{2}ط}{ءس^{2}} \;,\; \frac{ء^{2}ط}{ءس\,ءص} \;,\; \frac{ء^{2}ط}{ءص\,ءس} \;,\; \frac{ء^{2}ط}{ءص^{2}}$$

وتفاضلاتها تكون

$$\frac{\partial^2 \text{ط}}{\partial \text{س}^2}\,\partial \text{س}^2 \;\text{و}\; \frac{\partial^2 \text{ط}}{\partial \text{ص}\,\partial \text{س}}\,\partial \text{س}\,\partial \text{ص} \;\text{و}\; \frac{\partial^2 \text{ط}}{\partial \text{ص}\,\partial \text{س}}\,\partial \text{ص}\,\partial \text{س} \;\text{و}\; \frac{\partial^2 \text{ط}}{\partial \text{ص}^2}\,\partial \text{ص}^2$$

وباخذ مشتقات هذه المشتقات نجد المشتقات ذات المرتبة الثالثة ويرمز لها كما تقدم فالرمز $\frac{\partial^3 \text{ط}}{\partial \text{س}^2\,\partial \text{ص}}$ مثلا يدل على الناتج من أخذ مشتقة ط مرتين بالنسبة الى س ومرة بالنسبة الى ص

١١٢ يمكن البرهنة على ان

$$\frac{\partial^2 \text{ط}}{\partial \text{س}\,\partial \text{ص}} = \frac{\partial^3 \text{ط}}{\partial \text{ص}\,\partial \text{س}}$$

واذا فرض للمتغيرة س الزيادة فس فتأخذ المتعلقة ط الزيادة الجزئية $\text{ف}_{\text{س}}\text{ط}$ ويحدث

$$\frac{\text{ف}_{\text{س}}\text{ط}}{\text{فس}} = \frac{\text{م}(\text{س} + \text{فس} \,،\, \text{ص}) - \text{م}(\text{س} \,،\, \text{ص})}{\text{فس}}$$

وتكون نها $\frac{\text{ف}_{\text{س}}\text{ط}}{\text{فس}} = \frac{\partial \text{ط}}{\partial \text{س}}$ واذا رمزنا بالرمز $\frac{\text{ف}_{\text{ص}}\left(\frac{\text{ف}_{\text{س}}\text{ط}}{\text{فس}}\right)}{\text{فص}}$ لزيادة المتعلقة $\frac{\text{ف}_{\text{س}}\text{ط}}{\text{فس}}$ المقابلة للزيادة فص للمتغيرة ص نجد

$$\frac{\text{ف}_{\text{ص}}\frac{\text{ف}_{\text{س}}\text{ط}}{\text{فس}}}{\text{فص}} = \frac{\text{م}(\text{س} + \text{فس} \,،\, \text{ص} + \text{فص}) - \text{م}(\text{س} \,،\, \text{ص} + \text{فص}) - \text{م}(\text{س} + \text{فس} \,،\, \text{ص}) + \text{م}(\text{س} \,،\, \text{ص})}{\text{فس}\;\text{فص}}$$

وتكون

$$\text{نها}\,\frac{\text{ف}_{\text{ص}}\frac{\text{ف}_{\text{س}}\text{ط}}{\text{فس}}}{\text{فص}} = \frac{\partial\,\frac{\partial \text{ط}}{\partial \text{س}}}{\partial \text{ص}} = \frac{\partial^2 \text{ط}}{\partial \text{س}\,\partial \text{ص}}$$

ولنفرض الآن ان ص تزيد بالزيادة ف ص فتأخذ المتعلقة ط الزيادة $ف_{ص}ط$ ويحدث

$$\frac{ف_{ص}ط}{ف ص} = \frac{م(س، ص+ف ص) - م(س، ص)}{ف ص}$$

واذا زادت س بالمقدار ف س نجد

$$\frac{ف_{س}\frac{ف_{ص}ط}{ف ص}}{ف س} = \frac{م(س+ف س، ص+ف ص) - م(س+ف س، ص) - م(س، ص+ف ص) + م(س، ص)}{ف س ف ص}$$

وتكون

$$نها \frac{ف_{س}\frac{ف_{ص}ط}{ف ص}}{ف س} = \frac{ى^{2}ص}{ى ص ى س}$$

وبالمشاهدة نجد ان

$$\frac{ف_{ص}\frac{ف_{س}ط}{ف س}}{ف ص} = \frac{ف_{س}\frac{ف_{ص}ط}{ف ص}}{ف س}$$

ومنه

$$\frac{ى^{2}ط}{ى س ى ص} = \frac{ى^{2}ط}{ى ص ى س}$$

هو ما اردنا بيانه

لتكن مثلا المتعلقة ط $= \sqrt{س^{2} - ص^{2}}$ فنجد

$$\frac{ى ط}{ى س} = \frac{س}{\sqrt{س^{2}-ص^{2}}} ،\quad \frac{ى\frac{ى ط}{ى س}}{ى ص} = \frac{ى^{2}ط}{ى س ى ص} = \frac{س ص}{(س^{2}-ص^{2})^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{ى ط}{ى ص} = -\frac{ص}{\sqrt{س^{2}-ص^{2}}} ،\quad \frac{ى\frac{ى ط}{ى ص}}{ى س} = \frac{ى^{2}ط}{ى ص ى س} = \frac{س ص}{(س^{2}-ص^{2})^{\frac{3}{2}}}$$

(فى التفاضلات الكلية ذات المراتب المختلفة للمتعلقات بجملة مستقلات)

١١٣ قد وجدنا فيما سبق ان

$$ىط = \frac{ىط}{ىس}ىس + \frac{ىط}{ىص}ىص$$

فاذا اعتبرنا ىس و ىص كميتين ثابتتين وأخذنا تفاضل ىط الكلى يحدث

$$ى^2ط = ى\cdot\frac{ىط}{ىس}ىس + ى\cdot\frac{ىط}{ىص}ىص = \left(\frac{ى^2ط}{ىس^2}ىس + \frac{ى^2ط}{ىص^2}ىص\right)ىس + \left(\frac{ى^2ط}{ىصىس}ىس + \frac{ى^2ط}{ىص^2}ىص\right)ىص$$

وبملاحظة ان

$$\frac{ى^2ط}{ىسىص} = \frac{ى^2ط}{ىصىس}$$

نجد

$$ى^2ط = \frac{ى^2ط}{ىس^2}ىس^2 + 2\frac{ى^2ط}{ىسىص}ىسىص + \frac{ى^2ط}{ىص^2}ىص^2$$

وهو تفاضل ط الكلى ذو المرتبة الثانية

وبأخذ تفاضل هذه المعادلة نجد

$$ى^3ط = \frac{ى^3ط}{ىس^3}ىس^3 + 3\frac{ى^3ط}{ىس^2ىص}ىس^2ىص + 3\frac{ى^3ط}{ىسىص^2}ىسىص^2 + \frac{ى^3ط}{ىص^3}ىص^3$$

وهو التفاضل ذو المرتبة الثالثة

وبالمشاهدة يرى ان

$$ى^2ط = \left(\frac{ىط}{ىس}ىس + \frac{ىط}{ىص}ىص\right)^2$$

بشرط ان نجعل فى نشر الطرف الثانى اسس ىط علامات تفاضلية

وان $$ى^3ط = \left(\frac{ىط}{ىس}ىس + \frac{ىط}{ىص}ىص\right)^3$$

وعموما $$ى^نط = \left(\frac{ىط}{ىس}ىس + \frac{ىط}{ىص}ىص\right)^ن$$

وهذه القاعدة تجرى على متعلقة بمتغيرات ايا ما كان عددها

(فى المشتقات ذات المراتب المختلفة لمتعلقة مضمرة)

بمستقل واحد

١١٤ لتكن المعادلة م (س و ص) = ٠ المفروض فيها ان ص متعلقة بالمستقلة س فاذا أريد ايجاد مشتقاتها المتتابعة بواسطة المشتقات الجزئية للمتعلقة م (س و ص) ناخذ تفاضل هذه المعادلة مرة أولى فيحدث

$$\frac{\partial م}{\partial س} + \frac{\partial م}{\partial ص}\,\frac{\partial ص}{\partial س} = ٠$$

ومنها

$$\frac{\partial ص}{\partial س} = -\frac{\frac{\partial م}{\partial س}}{\frac{\partial م}{\partial ص}}$$

وهي المشتقة الاولى

وباخذ التفاضل مرة ثانية وملاحظة ان $\frac{\partial^2 م}{\partial س\,\partial ص} = \frac{\partial^2 م}{\partial ص\,\partial س}$ يحدث

$$\frac{\partial^2 م}{\partial س^2} + ٢\,\frac{\partial^2 م}{\partial س\,\partial ص}\,\frac{\partial ص}{\partial س} + \frac{\partial^2 م}{\partial ص^2}\,\frac{\partial ص^2}{\partial س^2} + \frac{\partial م}{\partial ص}\,\frac{\partial^2 ص}{\partial س^2} = ٠$$

واذا وضعنا فيه مقدار $\frac{\partial ص}{\partial س}$ السابق ينتج

$$\frac{\partial^2 ص}{\partial س^2} = -\frac{\frac{\partial^2 م}{\partial س^2}\left(\frac{\partial م}{\partial ص}\right)^2 + ٢\,\frac{\partial^2 م}{\partial س\,\partial ص}\left(\frac{\partial م}{\partial ص}\right)\left(\frac{\partial م}{\partial س}\right) + \frac{\partial^2 م}{\partial ص^2}\left(\frac{\partial م}{\partial س}\right)^2}{\left(\frac{\partial م}{\partial ص}\right)^3}$$

وباخذ التفاضل مرة ثالثة نجد $\frac{\partial^3 ص}{\partial س^3}$ وهلم جرا

الباب السابع عشر

(في تعميم قانون تيلور)

١١٥ لتكن م(س و ص) متعلقة بالمتغيرتين المستقلتين س و ص فاذا زادتا المقدارين سـ و صـ تصير المتعلقة المفروضة م(س + سـ و ص + صـ) ولكن المطلوب نشرها على حسب قوى الزيادتين سـ و صـ ولهذا نبدل فيها سـ و صـ بالكميتين ءسـ و ءصـ فتصير م(س + ءسـ و ص + ءصـ) = م(ء) ثم ننشر هذه المتعلقة على حسب قوى ء بواسطة قانون ماكوران فنجد

$$\text{م}(\text{ى}) = \text{م}(٠) + \text{ى}\,\text{م}'(٠) + \frac{\text{ى}^{٢}}{٢!}\text{م}''(٠) + \cdots + \frac{\text{ى}^{\text{ن}-١}}{(\text{ن}-١)!}\text{م}^{\text{ن}-١}(٠) + \frac{\text{ى}^{\text{ن}}}{\text{ن}!}\text{م}^{\text{ن}}(\text{ث}\,\text{ى}) \qquad (١)$$

واذا جعلنا لاجل الاختصار

$$\text{ط} = \text{س} + \text{ى}\,\text{سَ} \;،\; \text{ع} = \text{ص} + \text{ى}\,\text{صَ}$$

يكون

$$\text{م}(\text{ى}) = \text{ف}(\text{ط}\,،\,\text{ع})$$

وبأخذ التفاضل يحدث

$$\text{م}'(\text{ى})\,\partial\text{ى} = \frac{\partial\text{ف}}{\partial\text{ط}}\,\partial\text{ط} + \frac{\partial\text{ف}}{\partial\text{ع}}\,\partial\text{ع}$$

وبسبب ان

$$\partial\text{ط} = \text{سَ}\,\partial\text{ى} \;،\; \partial\text{ع} = \text{صَ}\,\partial\text{ى}$$

تؤول المعادلة الاخيرة الى

$$\text{م}'(\text{ى}) = \frac{\partial\text{ف}}{\partial\text{ط}}\,\text{سَ} + \frac{\partial\text{ف}}{\partial\text{ع}}\,\text{صَ}$$

وحيث ان تفاضل ط و ع ذوى المرتبة الثانية منعدمان يحدث

$$\text{م}''(\text{ى})\,\partial\text{ى}^{٢} = \frac{\partial^{٢}\text{ف}}{\partial\text{ط}^{٢}}\,\partial\text{ط}^{٢} + ٢\,\frac{\partial^{٢}\text{ف}}{\partial\text{ط}\,\partial\text{ع}}\,\partial\text{ط}\,\partial\text{ع} + \frac{\partial^{٢}\text{ف}}{\partial\text{ع}^{٢}}\,\partial\text{ع}^{٢}$$

ومنه

$$\text{م}''(\text{ى}) = \frac{\partial^{٢}\text{ف}}{\partial\text{ط}^{٢}}\,\text{سَ}^{٢} + ٢\,\frac{\partial^{٢}\text{ف}}{\partial\text{ط}\,\partial\text{ع}}\,\text{سَ}\,\text{صَ} + \frac{\partial^{٢}\text{ف}}{\partial\text{ع}^{٢}}\,\text{صَ}^{٢}$$

وبأخذ التفاضل مرة ثالثة يحدث

$$\overset{\prime\prime\prime}{م}(ء) = \frac{\partial^3 م}{\partial ط^3} س^3 + 3 \frac{\partial^3 م}{\partial ط^2 \partial ء} س^2 ص + 3 \frac{\partial^3 م}{\partial ط \partial ء^2} س ص^2 + \frac{\partial^3 م}{\partial ء^3} ص^3$$

وعموما

$$\overset{ن}{م}(ء) = \frac{\partial^ن م}{\partial ط^ن} س^ن + ن \frac{\partial^ن م}{\partial ط^{ن-1} \partial ء} س^{ن-1} ص + \frac{ن(ن-1)}{2!} \frac{\partial^ن م}{\partial ط^{ن-2} \partial ء^2} س^{ن-2} ص^2 + \cdots + \frac{\partial^ن م}{\partial ص^ن} ص^ن$$

واذا جعلنا $ء = ٠$ تتبدل ط وء بالكميتين س و ص وتؤول المعادلات السابقة الى

$$م(٠) = م(س و ص)$$

$$\overset{\prime}{م}(٠) = \frac{\partial م}{\partial س} س + \frac{\partial م}{\partial ص} ص$$

$$\overset{\prime\prime}{م}(٠) = \frac{\partial^2 م}{\partial س^2} س^2 + 2 \frac{\partial^2 م}{\partial س \partial ص} س ص + \frac{\partial^2 م}{\partial ص^2} ص^2$$

$$\overset{ن-1}{م}(٠) = \frac{\partial^{ن-1} م}{\partial س^{ن-1}} س^{ن-1} + (ن-1) \frac{\partial^{ن-1} م}{\partial س^{ن-2} \partial ص} س^{ن-2} ص + \cdots + \frac{\partial^{ن-1} م}{\partial ص^{ن-1}} ص^{ن-2}$$

فاذا وضعنا هذه المقادير فى القانون (١) وجعلنا $\text{ء} = ١$ يكون

$$
\text{(ت)}\left\{
\begin{aligned}
&\text{م}(\text{س}+\text{سـ}\,،\,\text{ص}+\text{صـ}) = \text{م}(\text{س}\,،\,\text{ص}) + \frac{\partial \text{م}}{\partial \text{س}}\,\text{سـ} + \frac{\partial \text{م}}{\partial \text{ص}}\,\text{صـ} + \\
&\frac{١}{٢!}\left(\frac{\partial^{٢} \text{م}}{\partial \text{س}^{٢}}\,\text{سـ}^{٢} + ٢\,\frac{\partial^{٢} \text{م}}{\partial \text{س}\,\partial \text{ص}}\,\text{سـ}\,\text{صـ} + \frac{\partial^{٢} \text{م}}{\partial \text{ص}^{٢}}\,\text{صـ}^{٢}\right) \\
&+\cdots+\frac{١}{(\text{ن}-١)!}\left(\frac{\partial^{\text{ن}-١} \text{م}}{\partial \text{س}^{\text{ن}-١}}\,\text{سـ}^{\text{ن}-١} + (\text{ن}-١)\,\frac{\partial^{\text{ن}-١} \text{م}}{\partial \text{س}^{\text{ن}-٢}\,\partial \text{ص}}\right. \\
&\left.\text{سـ}\,\text{صـ}^{\text{ن}-٢}+\cdots+\frac{\partial^{\text{ن}-١} \text{م}}{\partial \text{ص}^{\text{ن}-١}}\,\text{صـ}^{\text{ن}-١}\right) \\
&+\frac{١}{\text{ن}!}\left(\frac{\partial^{\text{ن}} \text{م}}{\partial \text{ط}^{\text{ن}}}\,\text{سـ}^{\text{ن}} + \text{ن}\,\frac{\partial^{\text{ن}} \text{م}}{\partial \text{ط}^{\text{ن}-١}\,\partial \text{ع}}\,\text{سـ}^{\text{ن}-١}\,\text{صـ}+\cdots+\right. \\
&\left.\frac{\partial^{\text{ن}} \text{م}}{\partial \text{ع}^{\text{ن}}}\,\text{صـ}^{\text{ن}}\right)_{(\text{س}+\text{ة}\,\text{سـ}\,،\,\text{ص}+\text{ة}\,\text{صـ})}
\end{aligned}
\right.
$$

وهو قانون تيلور فى الحالة المذكورة لكن يشترط ان نبدل فى الحد الاخير وهو باقى المتسلسلة ط بالكمية $\text{س}+\text{ة}\,\text{سـ}$ و ع بالكمية $\text{ص}+\text{ة}\,\text{صـ}$

وبناء على ماقلناه فى المطلب ١٠٣ يمكن وضعه على الصورة الآتية

$$
\begin{aligned}
&\text{م}(\text{س}+\text{سـ}\,،\,\text{ص}+\text{ص}) = \text{م}(\text{س}\,،\,\text{ص}) + \left(\frac{\partial \text{م}}{\partial \text{س}}\,\text{سـ} + \frac{\partial \text{م}}{\partial \text{ص}}\,\text{صـ}\right) \\
&+\frac{١}{٢!}\left(\frac{\partial \text{م}}{\partial \text{س}}\,\text{سـ} + \frac{\partial \text{م}}{\partial \text{ص}}\,\text{صـ}\right)^{٢} + \cdots\cdots \\
&+\frac{١}{(\text{ن}-١)!}\left(\frac{\partial \text{م}}{\partial \text{س}}\,\text{سـ} + \frac{\partial \text{م}}{\partial \text{ص}}\,\text{صـ}\right)^{\text{ن}-١} + \frac{١}{\text{ن}!}\left(\frac{\partial \text{م}}{\partial \text{ط}}\,\text{سـ}\right. \\
&\left.+\frac{\partial \text{م}}{\partial \text{ء}}\,\text{صـ}\right)^{\text{ن}}_{(\text{س}+\text{ة}\,\text{سـ}\,،\,\text{ص}+\text{صـ})}
\end{aligned}
$$

وهذه القاعدة تجرى على متعلقه بمتغيرات يا ما كان عددها

ولاجل استعمال القانون (ت) ينبغى ان مشتقات م (س و ص) الجزئية الغاية التى رتبتها ن ـ ١ تكون محدودة وان التى رتبتها ن تكون خلاف ذلك صغيرة بين النهايات س و س + سـ و ص و ص + صـ

(تعميم قانون ما كوران)

١١٦ اذا جعلنا فى القانون (ت) س = ٠ و ص = ٠ ووضعنا س و ص عوضا عن سـ و صـ ثم رمزنا بالرموز $\frac{ءم.}{ءس}$ و $\frac{ءم.}{ءص}$ و $\frac{ء^{٢}م.}{ءس ءص}$ .... الى ما تؤول اليه المشتقات الجزئية $\frac{ءم}{ءس}$ و $\frac{ءم}{ءص}$ و $\frac{ء^{٢}م}{ءس ءص}$ ...... حين يجعل فيها س = ٠ و ص = ٠ فيحدث

$$م(س و ص) = م(٠ و ٠) + \frac{ءم.}{ءس}س + \frac{ءم.}{ءص}ص + \frac{١}{!٢}\left(\frac{ء^{٢}م.}{ءس^{٢}}س^{٢} + ٢\frac{ء^{٢}م.}{ءس ءص}س ص + \frac{ء^{٢}م.}{ءص^{٢}}ص^{٢}\right) + \cdots$$

$$+\frac{١}{!(ن+١)}\left(\frac{ء^{ن-١}م.}{ءس^{ن-١}}س^{ن-١} + (ن+١)\frac{ء^{ن-١}م.}{ءس ءص^{ن-١}} \times س ص^{ن-٢} + \cdots + \frac{ء^{ن-١}م.}{ءص^{ن-١}}ص^{ن-١}\right)$$

$$+\frac{١}{!ن}\left(\frac{ء^{ن}م}{ءط^{ن}}س^{ن} + ن\frac{ء^{ن}م}{ءط^{ن-١}ءع}س ص + \cdots + \frac{ء^{ن}م}{ءع^{ن}}ص^{ن}\right)(ةس و ةص)$$

فينبغى تبديل ط و ع بالكميتين ةس و ةص

(في النهايات الكبرى والصغرى للمتعلقات بجملة متغيرات مستقلة)

١١٧ لتكن م (س و ص) متعلقة بالمستقلتين س و ص فيقال انها في نهايتها الكبرى اذا كانت أكبر من م (س ± سـ و ص ± صـ) بفرض سـ و صـ زيادتين صغيرتين بقدر ما يراد فالعلامة المميزة للنهاية الكبرى هي حينئذ ان الفرقين

$$م(س+سـ \text{ و } ص+صـ) - م(س \text{ و } ص) \quad \text{و} \quad م(س-سـ \text{ و } ص-صـ) - م(س \text{ و } ص)$$

يكونان سالبين

ويقال انها في نهايتها الصغرى اذا كانت أصغر من م (س ± سـ و ص ± صـ) فالفرقان المذكوران يكونان موجبين

لنفرض ان المشتقات الثانية ليست لانهائية فنجد بواسطة قانون تيلور (ت)

$$م(س+سـ \text{ و } ص+صـ) - م(س \text{ و } ص) = \frac{\partial م}{\partial س} سـ + \frac{\partial م}{\partial ص} صـ + \frac{١}{٢!}\left(\frac{\partial^٢ م}{\partial س^٢} سـ^٢ + ٢\frac{\partial^٢ م}{\partial س \partial ص} سـ صـ + \frac{\partial^٢ م}{\partial ص^٢} صـ^٢\right) + ب$$

واذا أخذنا سـ و صـ صغيرين صغرا كافيا تكون علامة الطرف الثاني عين علامة حاصل الجمع

$$\frac{\partial م}{\partial س} سـ + \frac{\partial م}{\partial ص} صـ \text{ ،}$$

لكن علامة هذه الكمية تتغير بتغيير علامتي سـ وصـ فينبغي حينئذ ان يكون

$$\frac{\partial م}{\partial س} سـ + \frac{\partial م}{\partial ص} صـ = ٠$$

وحيث ان سـ صـ زيادتان اختياريتان غير متعلقة احداهما بالاخرى تؤول المعادلة السابقة الى

$$\frac{\partial م}{\partial س} = ٠ \text{ و } \frac{\partial م}{\partial ص} = ٠ \qquad (١)$$

فبواسطة

فبواسطة هاتين المعادلتين يمكن تعيين س و ص

١١٨ الشرطان (١) اللذان يتحدان في النهايات الكبرى والصغرى يدلان على ان التفاضل الكلي للمتعلقة المفروضة يكون معدوما مهما كانت $\partial \text{س}$ و $\partial \text{ص}$ واذا تحققا يحدث

$$\text{م}(\text{س} + \text{سـ} ، \text{ص} + \text{صـ}) - \text{م}(\text{س} ، \text{ص}) = \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 \text{م}}{\partial \text{س}^2}\text{سـ}^2 + 2\frac{\partial^2 \text{م}}{\partial \text{س}\,\partial \text{ص}}\text{سـ}\,\text{صـ} + \frac{\partial^2 \text{م}}{\partial \text{ص}^2}\text{صـ}^2\right) + \text{ب}$$

وينبغي ان مقادير س و ص الناتجة من (١) اذا وضعت في هذه المعادلة يحفظ طرفها الثاني علامته (بأخذ سـ و صـ صغيرين جدا) واذا فرضنا ان المشتقات ذات المرتبة الثانية لا تنعدم بهذه المقادير تكون علامة الطرف المذكور عين علامة الكمية

$$\frac{\partial^2 \text{م}}{\partial \text{س}^2}\text{سـ}^2 + 2\frac{\partial^2 \text{م}}{\partial \text{س}\,\partial \text{ص}}\text{سـ}\,\text{صـ} + \frac{\partial^2 \text{م}}{\partial \text{ص}^2}\text{صـ}^2$$

فيلزم حينئذ ان هذه الكمية أو هذه الاخرى الناتجة من قسمة الاولى على صـ^2

$$\frac{\partial^2 \text{م}}{\partial \text{س}^2}\left(\frac{\text{سـ}}{\text{صـ}}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 \text{م}}{\partial \text{س}\,\partial \text{ص}}\frac{\text{سـ}}{\text{صـ}} + \frac{\partial^2 \text{م}}{\partial \text{ص}^2}$$

تكون دائما موجبة او سالبة مهما كانت النسبة $\frac{\text{سـ}}{\text{صـ}}$ ولذا يشترط كما هو موضح في مبادي الجبر ان يكون

$$\frac{\partial^2 \text{م}}{\partial \text{س}^2}\,\frac{\partial^2 \text{م}}{\partial \text{ص}^2} - \left(\frac{\partial^2 \text{م}}{\partial \text{س}\,\partial \text{ص}}\right)^2 > ٠$$

ويتحقق هذا الشرط اذا اتحدت علامتا $\frac{\partial^2 \text{م}}{\partial \text{ص}^2}$ و $\frac{\partial^2 \text{م}}{\partial \text{ص}^2}$ فتكون حينئذ المتعلقة المفروضة في نهايتها الكبرى اذا كانت هاتان المشتقتان سالبتين وفي نهايتها الصغرى اذا كانتا موجبتين

فاذا فرضنا ان المشتقات ذات المرتبة الثانية تنعدم بمقادير س و ص الناتجة من (١) فلا يكون للمتعلقة نهاية كبرى ولا صغرى الا اذا انعدمت أيضا

المشتقات ذات المرتبة الثالثة وكان حاصل جمع المشتقات ذات المرتبة الرابعة لا تتغير علامته

ولو كان عندنا متعلقة با كثر من متغيرين لاجرينا العمل كما سبق

لتكن مثلا المتعلقة

$$م(س \, و \, ص) = (س - ١)^٢ + (ص - ب)^٢ + (س - ص)^٢$$

فنجد

$$د م = ٢ (٢ س - ص - ١) د س + ٢ (٢ ص - س - ب) د ص$$

ومن المعادلتين

$$٢ س - ص - ١ = ٠ \quad و \quad ٢ ص - س - ب = ٠$$

يستخرج $س = \frac{٢ ١ + ب}{٣}$ ، $ص = \frac{٢ ب + ١}{٣}$

وباخذ التفاضل الكلي ذي المرتبة الثانية يحدث

$$د^٢ م = ٤ د س^٢ - ٤ د س د ص + ٤ د ص^٢$$

فيشاهد بسهولة ان $\frac{د^٢ م}{د س^٢}$ و $\frac{د^٢ م}{د ص^٢}$ متحدا العلامة وانهما موجبان وان

$$\frac{د^٢ م}{د س^٢} \frac{د^٢ م}{د ص^٢} - \left(\frac{د^٢ م}{د س \, د ص}\right)^٢ = ٢ + ٢ - (-١)^٢ > ٠$$

فاذا تكون المتعلقة المفروضة في نهايتها الصغرى بمقداري س و ص السابقتين وتساوي النهاية المذكورة $\frac{(١ - ب)^٢}{٣}$

تمرينات

١ . $م(س \, و \, ص) = س^٣ ص^٢ (١ - س - ص)$ فنجد $س = \frac{١}{٢}$ و $ص = \frac{١}{٣}$

$م = \frac{١}{٤٣٢}$ وهي نهاية كبرى

٢ $م(س \, و \, ص) = س^٤ + ص^٤ - ٢ س^٢ + ٤ س ص - ٢ ص^٢$

الجواب:
- $س = \sqrt{٢}$ ، $ص = -\sqrt{٢}$ نهاية كبرى
- $س = -\sqrt{٢}$ ، $ص = \sqrt{٢}$ نهاية صغرى

٠٣ المطلوب أقصر بعد خطين مستقيمين أياما كان وضعهما في الفراغ

لتكن $\text{س} = \text{جـ}\,\text{ط} + \text{ء}$ ، $\text{ص} = \text{هـ}\,\text{ط} + \text{ن}$ و $\text{س} = \text{جَ}\,\text{ط} + \text{ءَ}$ ، $\text{ص} = \text{هَ}\,\text{ط} + \text{نَ}$ معادلات المستقيمين المفروضين فبعدهما يكون

$$\text{ب} = \frac{(\text{ء} - \text{ءَ})(\text{هـ} - \text{هَ}) - (\text{ن} - \text{نَ})(\text{جـ} - \text{جَ})}{\sqrt{(\text{جـ} - \text{جَ})^2 + (\text{هـ} - \text{هَ})^2 + (\text{جـ}\,\text{هَ} - \text{جَ}\,\text{هـ})^2}}$$

وهو المطلوب

١١٩ لتكن م (س ، ص ، ط ، ... ع) متعلقة بمتغيرات عددها جـ + ن مرتبط بعضها ببعض بمعادلات مثل

$$\left.\begin{array}{l} \text{م}_1(\text{س}، \text{ص}، \text{ط}، \dots، \text{ع}) = 0 \\ \text{م}_2(\text{س}، \text{ص}، \text{ط}، \dots، \text{ع}) = 0 \\ \text{-------------------} \\ \text{م}_{\text{جـ}}(\text{س}، \text{ص}، \text{ط}، \dots، \text{ع}) = 0 \end{array}\right\} (١)$$

عددها جـ فبموجب ما تقدم ينبغي ان يكون

$$\frac{\text{د م}}{\text{د س}}\text{د س} + \frac{\text{د م}}{\text{د ص}}\text{د ص} + \frac{\text{د م}}{\text{د ط}}\text{د ط} + \dots + \frac{\text{د م}}{\text{د ع}}\text{د ع} = 0 \quad (٢)$$

لنأخذ تفاضل المعادلات (١) فنجد

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\text{د م}_1}{\text{د س}}\text{د س} + \frac{\text{د م}_1}{\text{د ص}}\text{د ص} + \dots + \frac{\text{د م}_1}{\text{د ع}}\text{د ع} = 0 \\ \frac{\text{د م}_2}{\text{د س}}\text{د س} + \frac{\text{د م}_2}{\text{د ص}}\text{د ص} + \dots + \frac{\text{د م}_2}{\text{د ع}}\text{د ع} = 0 \\ \text{-------------------} \\ \frac{\text{د م}_{\text{جـ}}}{\text{د س}}\text{د س} + \frac{\text{د م}_{\text{جـ}}}{\text{د ص}}\text{د ص} + \dots + \frac{\text{د م}_{\text{جـ}}}{\text{د ع}}\text{د ع} = 0 \end{array}\right\} (٣)$$

فاذا محونا من المعادلة (٢) جـ متغيرات بواسطة المعادلات (٣) يبقى فيها

ن متغيرات اختيارية فمساواة مكرراتها بالصفر يحدث ن معادلات بواسطتها وبواسطة المعادلات (١) يمكن تعيين كل المتغيرات المذكورة التي بها تصير المتعلقة في النهاية الكبرى أو الصغرى

عوضا عن حل المعادلات (٣) بالنسبة الى التفاضلات التي يراد محوها من (٢) يمكن اجراء العمل بطريقة أخرى وهي ان نضرب كلا من المعادلات (٣) في كمية غير معينة ونضمها الى المعادلة (٢) فنجد

$$\left.\begin{array}{l}
\left(\frac{\partial \text{م}}{\partial \text{س}} + \text{ن}\,\frac{\partial \text{م}_1}{\partial \text{س}} + \text{ل}\,\frac{\partial \text{م}_2}{\partial \text{س}} + \cdots\right)\partial \text{س} \\
+\left(\frac{\partial \text{م}}{\partial \text{س}} + \text{ن}\,\frac{\partial \text{م}_1}{\partial \text{ص}} + \text{ل}\,\frac{\partial \text{م}_2}{\partial \text{ص}} + \cdots\right)\partial \text{ص} \\
+\left(\frac{\partial \text{م}}{\partial \text{ط}} + \text{ن}\,\frac{\partial \text{م}_1}{\partial \text{ط}} + \text{ل}\,\frac{\partial \text{م}_2}{\partial \text{ط}} + \cdots\right)\partial \text{ط} \\
\text{-----------------------------------} \\
+\left(\frac{\partial \text{م}}{\partial \text{ع}} + \text{ن}\,\frac{\partial \text{م}_1}{\partial \text{ع}} + \text{ن}\,\frac{\partial \text{م}_2}{\partial \text{ع}} + \cdots\right)\partial \text{ع}
\end{array}\right\} = ٠$$

ويلزم تعيين ن و ل ... حيث تزول من هذه المعادلة تفاضلات الكميات التي يراد محوها وحيث ينبغي بعد ذلك مساواة مكررات التفاضلات الباقية بالصفر يؤول الامر الى مساواة مكررات كل التفاضلات الموجودة في المعادلة السابقة به أي بالصفر فنجد المعادلات

$$\begin{array}{l}
\frac{\partial \text{م}}{\partial \text{م}} + \text{ن}\,\frac{\partial \text{م}_1}{\partial \text{س}} + \text{ل}\,\frac{\partial \text{م}_2}{\partial \text{س}} + \cdots = ٠ \\
\frac{\partial \text{م}}{\partial \text{ص}} + \text{ن}\,\frac{\partial \text{م}_1}{\partial \text{ص}} + \text{ل}\,\frac{\partial \text{م}_2}{\partial \text{ص}} + \cdots = ٠ \\
\text{-----------------------------------} \\
\frac{\partial \text{م}}{\partial \text{م}} + \text{ن}\,\frac{\partial \text{م}_1}{\partial \text{ع}} + \text{ل}\,\frac{\partial \text{م}_2}{\partial \text{ع}} + \cdots = ٠
\end{array}$$

التي عددها ح + ن فبواسطتها وبواسطة المعادلات (١) تتعين الكميات ن و ل ... التي عددها ب والمجاهيل س و ص و ط و ...

د ء التى عددها ج + ن .

ليكن مثلا م (س و ص و ط) = س ص ط بفرض ان س + ص + ط = ١ نجد

ص ط ∂س + س ط ∂ص + س ص ∂ط = ٠

∂س + ∂ص + ∂ط = ٠

و يضرب المعادلة الاخيرة فى ك وضمها الى الاولى يحدث

(ك + ص ط) ∂س + (ك + س ط) ∂ص + (ك + س ص) ∂ط = ٠

ومنها ك + ص ط = ٠

ك + س ط = ٠

ك + س ص = ٠

فمن هذه المعادلات والمعادلة س + ص + ط = ١ يستخرج

س = ص = ط = ١/٣

وهو المطلوب

تمرين

(مسئلة) المطلوب ايجاد السطح المستوى الذى يمر بنقطة معلومة الوضع فى الفراغ و يصنع مع المستويات الاحداثيات أصغر هرم

ليكن سَ و صَ و طَ احداثيات النقطة المفروضة فمعادلة كل مستو مار بها تكون

(س − سَ) + ا (ص − صَ) + ب (ط − طَ) = ٠

وحجم الهرم يكون

ح = (سَ + ا صَ + ب طَ) / ٦ ا ب

فبموجب ما تقدم نجد ان

ا = سَ/صَ ، ب = سَ/طَ ، ح = ٩/٢ سَ صَ طَ

الباب الثامن عشر

(في النقطة الممتازة)

نقط منحن الممتازة هي التي تمتاز عن سواها ببعض خواص خصوصية وتنقسم الى ستة أقسام وهي

١ . نقط التغير

١٣٠ . نقطة التغير هي النقطة التي فيها يصير المنحني مجوفا بعد ان كان محدبا وبعبارة أخرى هي النقطة التي فيها يقطع المماس المنحني ؛ شرط وجودها حينئذ ان تتغير علامة المشتقة الثانية $\text{م}''(\text{س})$ ولا يتحقق هذا الا بمرورها بالصفر أو بعد النهاية فاذا يكفي لتعيين النقط المذكورة ان تحل المعادلة

$$\text{م}''(\text{س}) = ٠ \quad \text{أو المعادلة} \quad \text{م}''(\text{س}) = \infty$$

لكن مثلا

$$\text{ص} = \text{ب} + ٢\,(\text{س} - \text{ج})^{٣}$$

فبأخذ التفاضل يحدث

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٦(\text{س} - \text{ج})^{٢} \;،\; \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = ١٢(\text{س} - \text{ج}) \;،\; \frac{\text{ء}^{٣}\text{ص}}{\text{ءس}^{٣}} = ١٢$$

وبجعل $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = ١٢\,(\text{س} - \text{ج}) = ٠$

يحدث $\text{س} = \text{ج}$ وهو معين نقطة التغير ومرتبها يكون حينئذ $\text{ص} = \text{ب}$

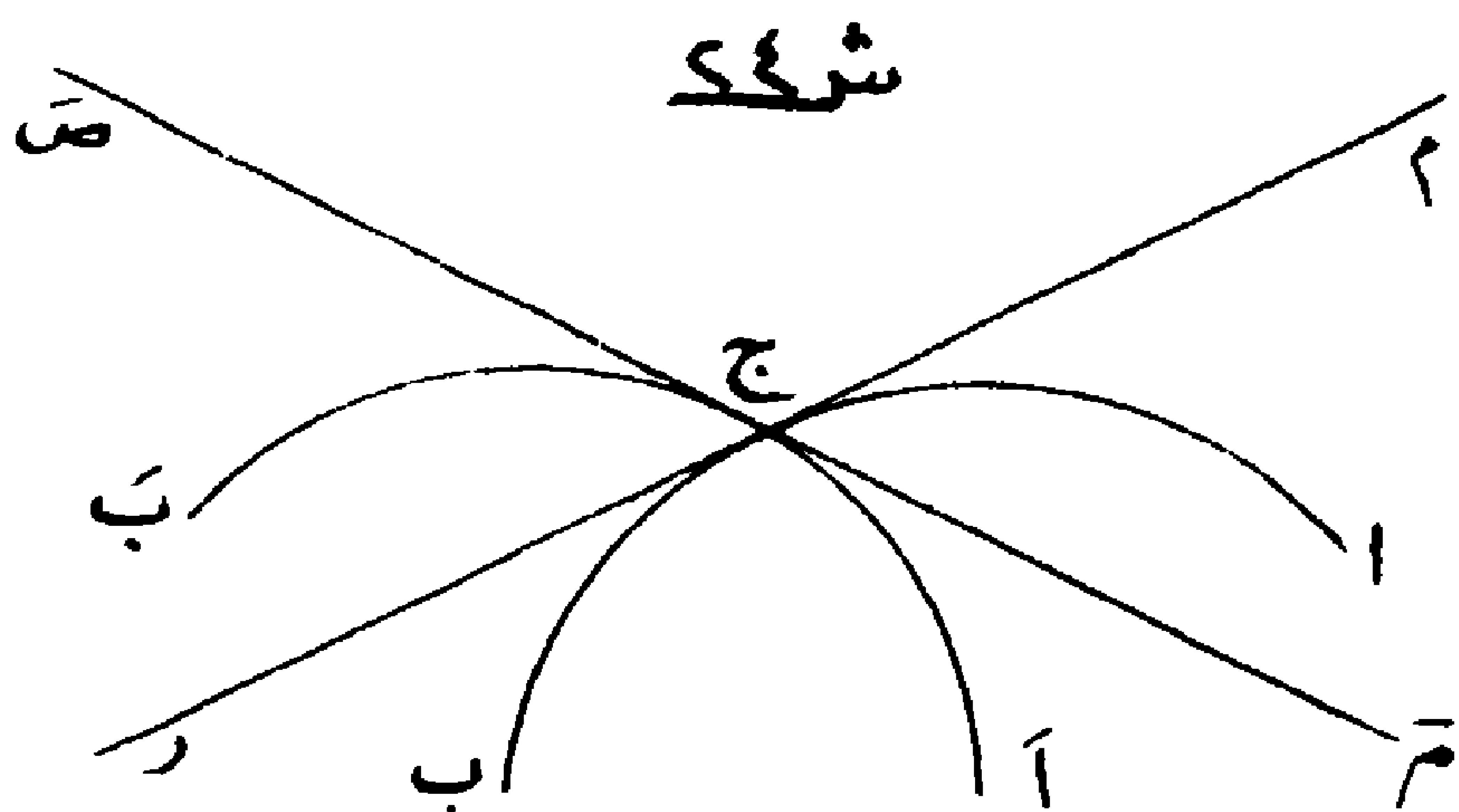
وتأكيدا لوجودها نضع $\text{س} + \text{ه}$ ثم $\text{س} - \text{ه}$ بدلا عن س في $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ فنجد

$$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = ١٢\,\text{ه} \;،\; \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = -\,١٢$$

وينتج من اختلاف علامتي هاتين الكميتين ان النقطة المعتبرة هي نقطة تغير

٢ . نقط التكرر

١٣١ . نقطة التكرر هي النقطة التي يمر بها عدة فروع للمنحني وله فيها جملة مماسات مختلفة (شـ ٢٤) وتسمى ثنائية اذا مر بها فرعان وثلاثية اذا مر بها ثلاثة فروع وهلم جرا



لتكن مثلا المعادلة

$$ص = ح س \pm (س - د) \sqrt{س}$$

فاذا أخذت س مقداراً أكبر من د قليلا ثم مقدارا آخر أصغر منها تاخذ ص مقدارين حقيقيين يؤولان الى واحد اذا صارت س = د وعليه فالمنحنى فرعان يمران بالنقطة س = د و ص = ح د وبأخذ مشتقة المعادلة نجد

$$\frac{ء ص}{ء س} = ح \pm \left(\sqrt{س} + \frac{س - د}{٢\sqrt{س}}\right)$$

وبجعل س = د يحدث

$$\frac{ء ص}{ء س} = ح \pm \sqrt{د}$$

أعنى ان للمنحنى المفروض مماسين مختلفين فى النقطة (د و ح د) فهى حينئذ نقطة تكرر ثنائية وعلى العموم لتكن المعادلة الجبرية م (س و ص) = ٠ فيحدث منها

$$\frac{ء ص}{ء س} = - \frac{\frac{ء م}{ء س}}{\frac{ء م}{ء ص}}$$

وحيث ان فى كل نقطة تكرر للمشتقة مقدارين بالاقل وانا لا نجد هنا الا واحدا فقط فيلزم حينئذ ان هذا المقدار يكون غير معين أعنى انه يؤول الى الصورة $\frac{٠}{٠}$ فاذا يكون

$$\frac{دم}{دس} = ٠ \text{ ، } \frac{دم}{دص} = ٠$$

فالنقط المطلوبة هي التي احداثيات كل منها يوافق هاتين المعادلتين والمعادلة م (س ، ص) = ٠ ولتعيين اتجاه المماسات نأخذ التفاضل الكلي ذا المرتبة الثانية فنجد بملاحظة ان $\frac{دم}{دص} = ٠$

$$\frac{د^٢م}{دص^٢}\left(\frac{دص}{دس}\right)^٢ + ٢\frac{د^٢م}{دصدس}\frac{دص}{دس} + \frac{د^٢م}{دس^٢} = ٠$$

فاذا كانت النقطة ثنائية يلزم ان يكون جذرا هذه المعادلة حقيقيين ومختلفين وأما ان كانت ثلاثية فينبغي ان يكون

$$\frac{د^٢م}{دص^٢} = ٠ \text{ ، } \frac{د^٢م}{دصدس} = ٠ \text{ ، } \frac{د^٢م}{دس^٢} = ٠$$

ونجد المماسات بحل المعادلة التفاضلية ذات المرتبة الثالثة وهكذا لتكن مثلا المعادلة

$$ص^٢ - ٢ سص - س^٣ + ٣ س^٢ - س = ٠$$

فنجد

$$٢ (ص - س) \frac{دص}{دس} - ٢ ص - ٣ س^٢ + ٦ س - ١ = ٠$$

ومن المعادلتين

$$ص - س = ٠ \text{ ، } ٢ ص + ٣ س^٢ - ٦ س + ١ = ٠$$

يستخرج س = ١ و ص = ١ وهما مقداران يناسبان للمعادلة المفروضة ولتعيين $\frac{دص}{دس}$ نأخذ التفاضل الثاني فنجد

$$\left(\frac{دص}{دس}\right)^٢ - ٢ \frac{دس}{دص} = ٠$$

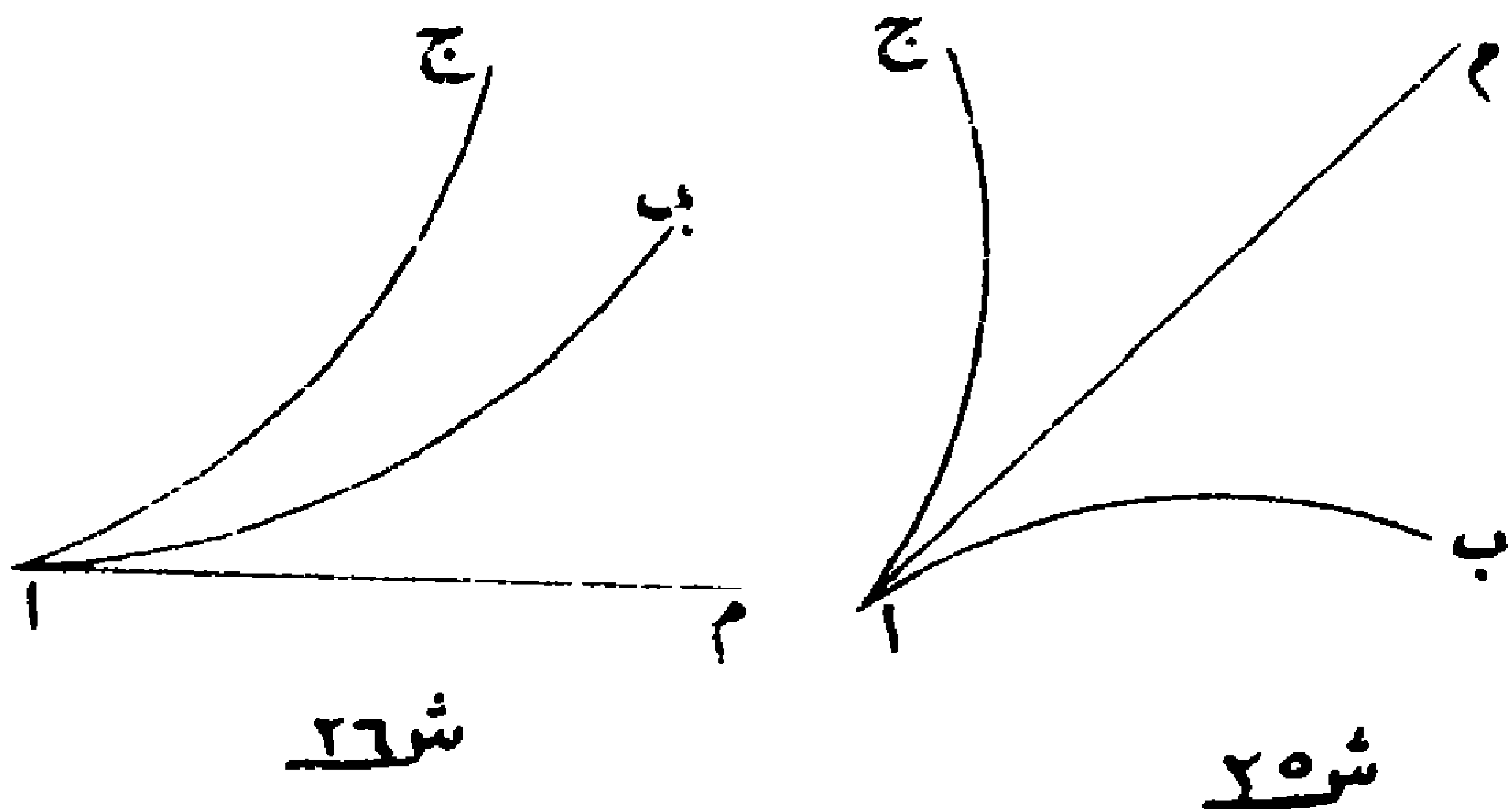
ومنها

$$\frac{دص}{دس} = ٢ \text{ ، } \frac{دص}{دس} = ٠$$

فالنقطة س = ١ و ص = ١ تكون حينئذ ثنائية

٣٠ نقط الرجوع

١٢٢ . نقطة الرجوع هى نقطة يقف بها فرعان لمنحنى ولهما مماس مشترك وتسمى ذات النوع الاول اذا كان المماس بينهما (شـ ٢٥) وذات النوع الثانى اذا وجد الفرعان من احدى جهتى المماس (شـ ٢٦)



شـ ٢٦ — شـ ٢٥

لتكن مثلا المعادلة

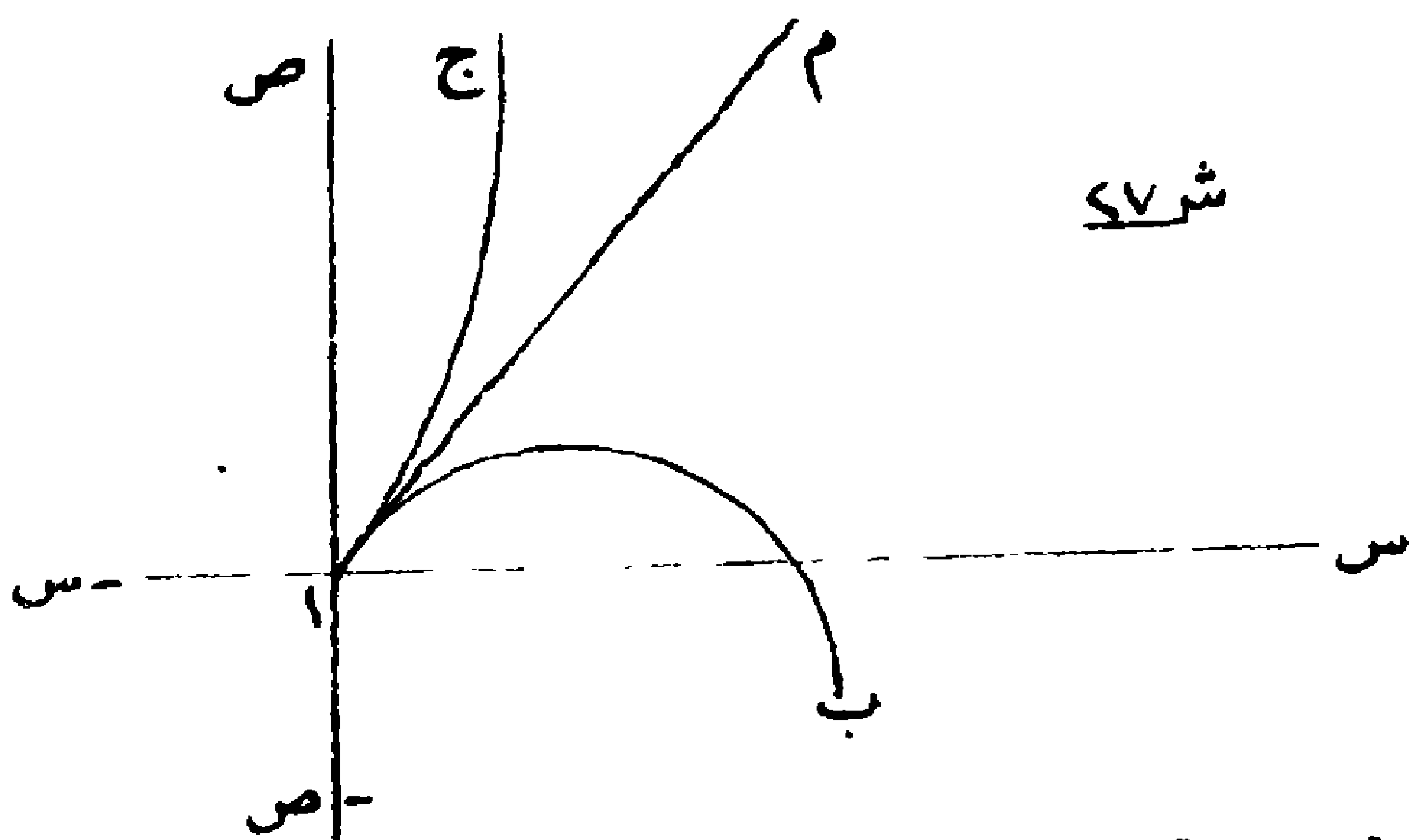
$$\text{ص} = \text{ج}\,\text{س} \pm \text{س}^{\frac{3}{2}}$$

فيحدث

$$\frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \text{ج} \pm \frac{3}{2}\,\text{س}^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d^2\text{ص}}{d\text{س}^2} = \pm \frac{3}{4}\,\text{س}^{-\frac{1}{2}}$$

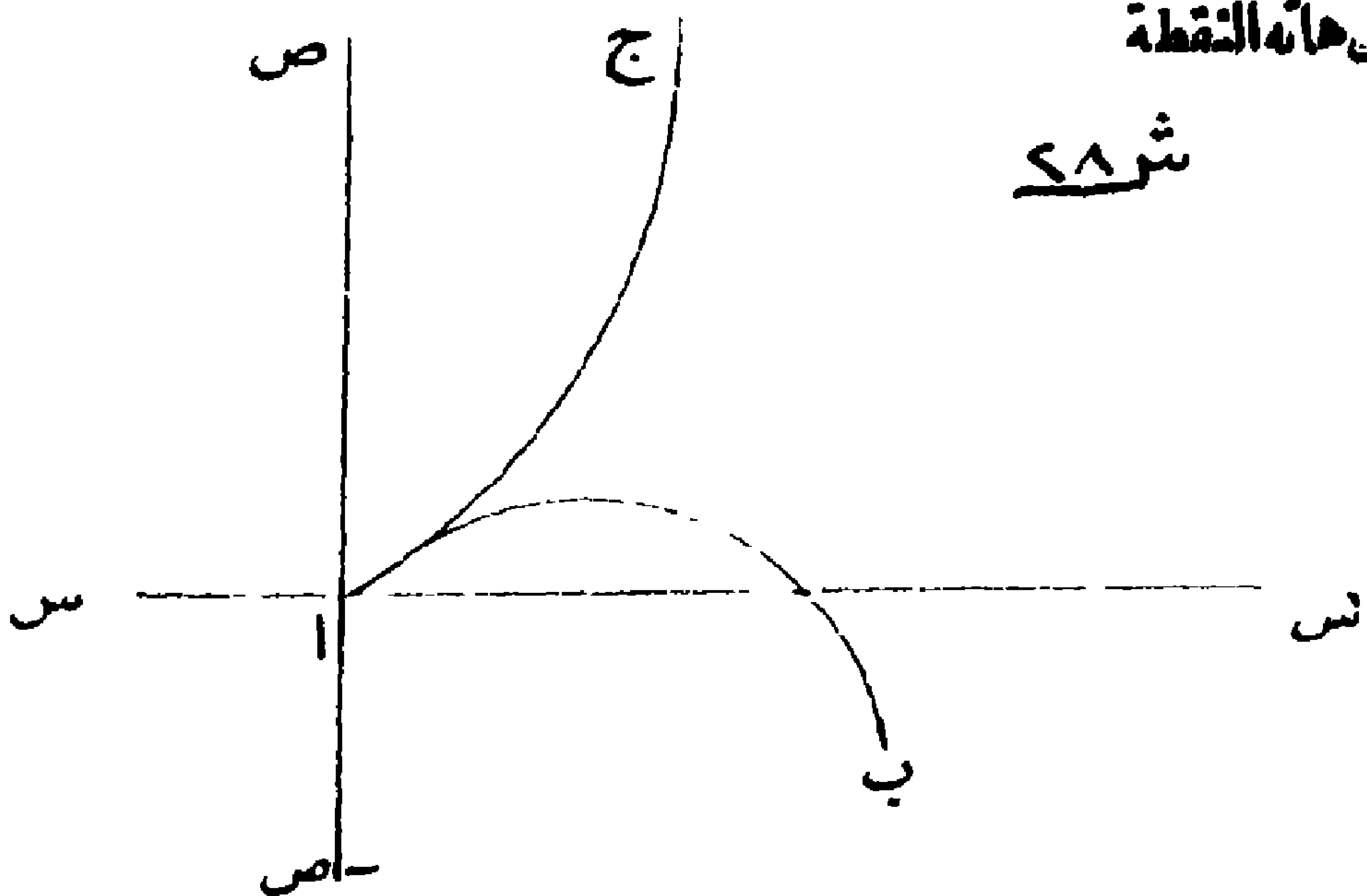
ويرى بسهولة انه من جهة المعينات الموجبة (شـ ٢٧) ص لها قيمتان حقيقيتان ويصيران تخيليين اذا أخذت س مقادير سالبة فاذا للمنحنى فرعان اب ، اج منتهيان فى نقطة الاصل ولهما مماس مشترك يتعين اتجاهه بالمعادلة $\frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \text{ج}$ ويرى أيضا ان هذه النقطة ذات النوع الاول لانه اذا أخذت س مقادير صغيرة جدا كان للمشتقة الثانية $\frac{d^2\text{ص}}{d\text{س}^2}$ مقادير مختلفة العلامة



وكذا يرى ان للمنحنى (شر ٢٨) المبين بالمعادلة

$$\text{أ}^{٣}\,\text{ص}^{٢} - ٢\,\text{أ}^{٢}\,\text{ص}\,\text{س}^{٢} + \text{أ}\,\text{س}^{٤} - \text{س}^{٥} = ٠$$

نقطة رجوع ذات النوع الثانى فى الاصل وان محور العينات مماس للفرعين فى هاته النقطة



وعلى العموم اذا كانت م (س و ص) = ٠ معادلة جبرية لمنحنى وكان المرام الحصول على نقط الرجوع فانا نبحث عن النقط التى احداثياتها تكافئ المعادلات

$$\frac{\text{د م}}{\text{د س}} = ٠ \quad \text{و} \quad \frac{\text{د م}}{\text{د ص}} = ٠ \quad \text{و} \quad \text{م (س و ص)} = ٠$$

ثم نختبر المعادلة التفاضلية ذات المرتبة الثانية اذا كانت تعطى للمشتقة $\frac{\text{د م}}{\text{د س}}$

مقدارين

مقـدارين متساويين وأخيرا نبحث عما اذا كان المنحنى يمتد من جهتى المماس المشترك أو من جهة واحـدة ففى الحالة الاخيرة تكون النقطة المعتبرة نقطة رجوع ويتعين نوعها بواسطة علامة المشتقة الثانية

٤ • النقطة المنفردة

١٢٣ ق النقطة المنفردة هى نقطة احداثاها يكافئان معادلة المنحنى بدون ان تكون على فرع من فروعه لتكن مثلا المعادلة

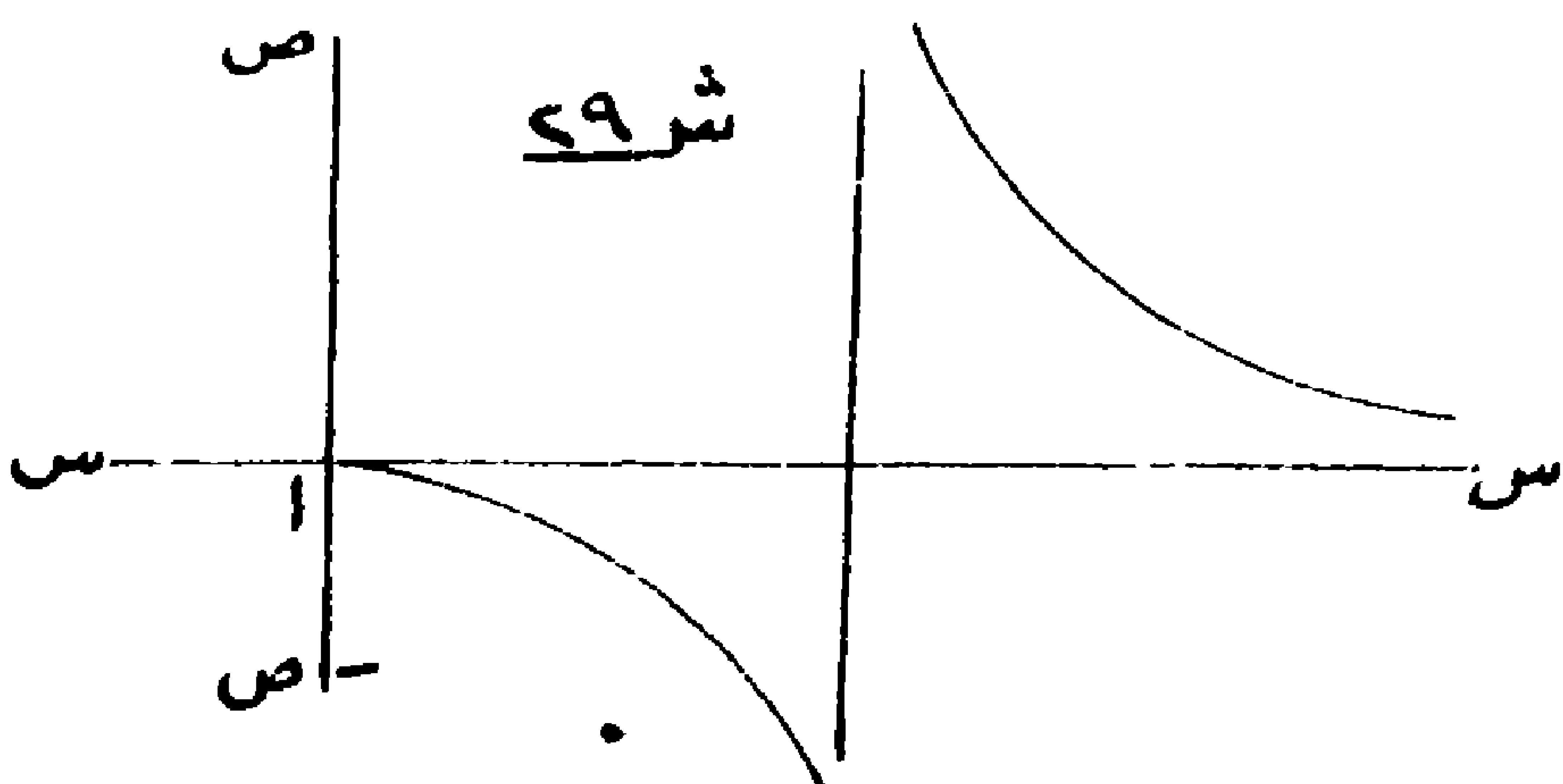
$$ص = ب + (س - ح) \sqrt{س - ء}$$

فاذا فرضنا ان ح < ء نرى ان ص تصير تخيلية اذا أخذت س مقدارا أصغر من ء غير المقدار س = ح فان ص تكون صفرا واذا تكون النقطة س = ح و ص = ب نقطة منفردة واذا فرضنا ح > ء تكون النقطة المذكورة ثنائية

٥ • نقط الوقوف

١٢٤ ق اذا كان المتعلقة م (س) مقدارا يصير تخيليا فالمنحنى المبين بالمعادلة ص = م (س) يقف بغتة بنقطة تسمى بنقطة الوقوف

لتكن مثلا المعادلة $ص = \frac{1}{لغا\ س}$ فبكل مقادير س الموجبة تكون ص حقيقية وبكل مقاديرها السالبة تكون ص تخيلية واذا جعلنا س = ٠ يكون ص = ٠ فللمنحنى نقطة وقوف فى الاصل (شـ ٢٩)



٥٠ النقطة المنزوية

١٣٤ اذا اجتمع فرعان لمنحنى فى نقطة حيث يكون لهما فيها مماسان مختلفان فتسمى تلك النقطة بالنقطة المنزوية فللتحصيل عليها يكفى ايجاد مقدار س الذى به يكون للمشتقة $\frac{ء ص}{ء س}$ مقداران مختلفان

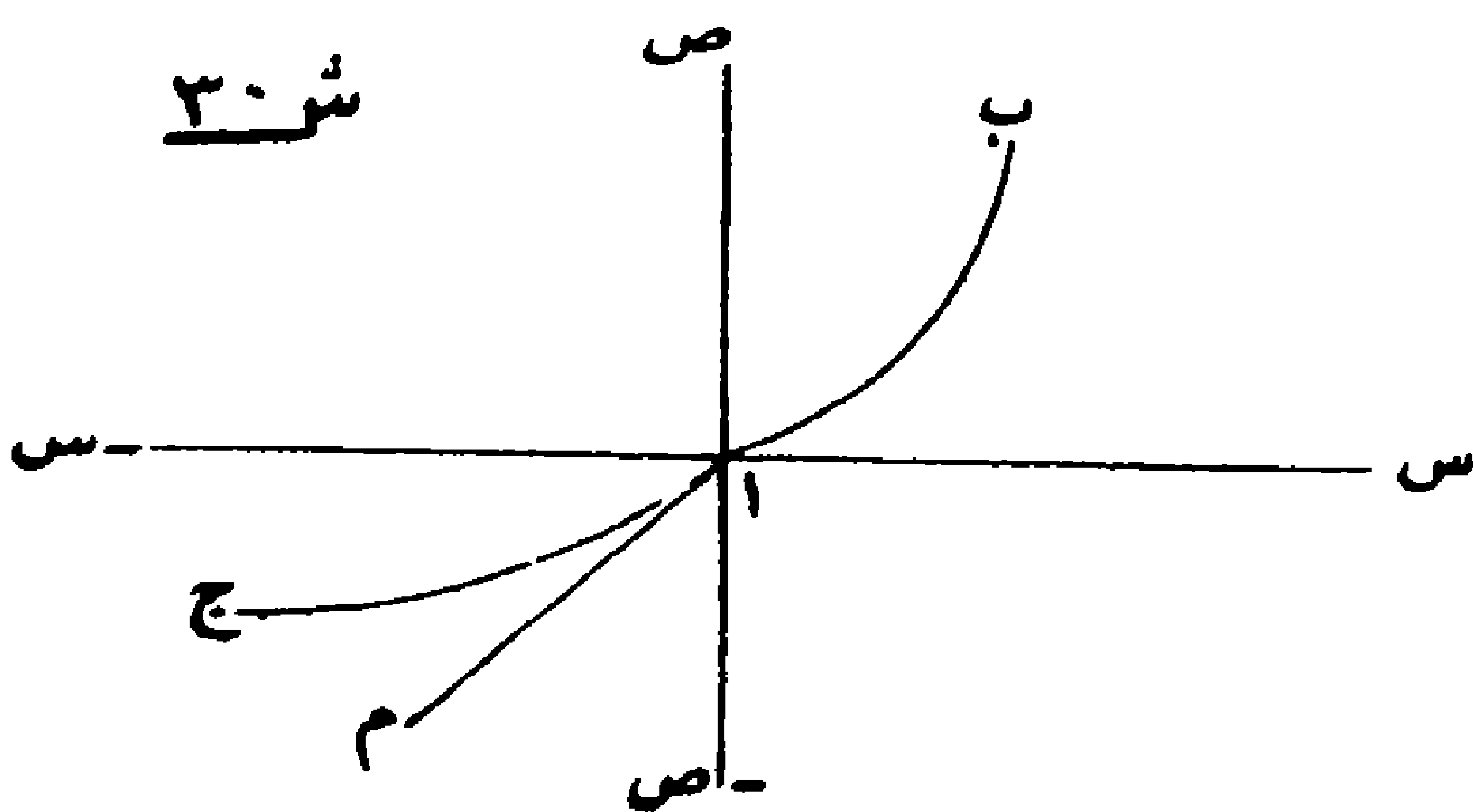
ليكن مثلا (شـ ٣٥) المنحنى المبين بالمعادلة

$$ص = \frac{س}{١ + \propto^{\frac{١}{س}}}$$

فنجد انه يمر باصل المحورين وله فيه نقطة منزوية ولايجاد مماسيه فى هذه النقطة يكفى بموجب ماقلناه فى حاشية المطلب ٧٣ ان تعين نهاية النسبة

$$\frac{ص}{س} = \frac{١}{١ + \propto^{\frac{١}{س}}}$$

بفرض ان س = ٠ فنقول اذا قربت س من الصفر قربت الكمية $\propto^{\frac{١}{س}}$ منه أيضا أو من + ∞ على حسب كون



س موجبة او سالبة فكررا معادلتى المماسين يكونان حينئذ ٥ و ١ وعليه يكون المنحنى مكونا من فرعين احدهما موضوع فى زاوية المحورين

الموجبين

الموجبين ويسمى محور المعينات فى نقطة الاصل والاخر فى زاوية المحورين السالبين ويسمى فيها ايضا منصف الزاوية المذكورة

تمرينات

١. على نقط التغير

١. $ص = خا\,س$ (تجد لهذا المنحنى نقط تغير لا يحصى عددها موضوعة على محور المعينات)

٢. $ص = \frac{س^{٢}}{جـ} - \frac{س^{٣}}{جـ^{٢}}$ (تجد نقطة تغير احداثياها $س = \frac{جـ}{٣}$ و $ص = \frac{٢جـ}{٢٧}$.)

٣. $ص = جـ\,ص^{٣} + ء\,س^{٣} = جـ^{٢}\,ء^{٢}$ فبوضع $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = ٠$ (تجد النقطة $س = ٠$ و $ص = \sqrt[٣]{جـ\,ء^{٢}}$

وبوضع $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = \infty$ تجد نقطة أخرى $س = \sqrt[٣]{جـ^{٢}ء}$ و $ص = ٠$)

٢. على نقط التكرر

١. $(ص - ١)^{٢} - س^{٢}(س + ١) = ٠$ (نقطة الاصل نقطة ثنائية)

٢. $س^{٤} + س^{٢}ص^{٢} - ٩\,جـ\,س^{٢}ص + جـ^{٢}ص^{٢} = ٠$ (نقطة الاصل نقطة ثنائية)

٣. على نقط الرجوع

١. $ص = جـ \pm \sqrt{(س - ء)^{٣}}$ (نقطة رجوع من النوع الاول وهى $س = ء$ و $ص = جـ$)

٢. $ص = س^{٢}(١ \pm \sqrt{س})$ (الاصل نقطة رجوع من النوع الثانى)

٤. على النقط المنفردة

١. $ص = \pm (س + جـ)\sqrt{س}$ (نقطة منفردة وهى $س = -جـ$ و $ص = ٠$)

٢ ・ $(س^٢ + ص^٢)^٢ = ب^٢ س^٢ + ء^٢ ب^٢$ (الاصل نقطة منفردة)

٠٥ على نقط الوقوف

١ ・ $ص = ه^{\frac{١}{س}}$ (الاصل نقطة وقوف)

٢ ・ $ص = س$ لغا $س$ (الاصل نقطة وقوف)

٠٦ على النقطة المنزوية

١ ・ $ص = س$ قوظا $\frac{١}{س}$ (الاصل نقطة منزوية)

(فى تحليل المنحنيات)

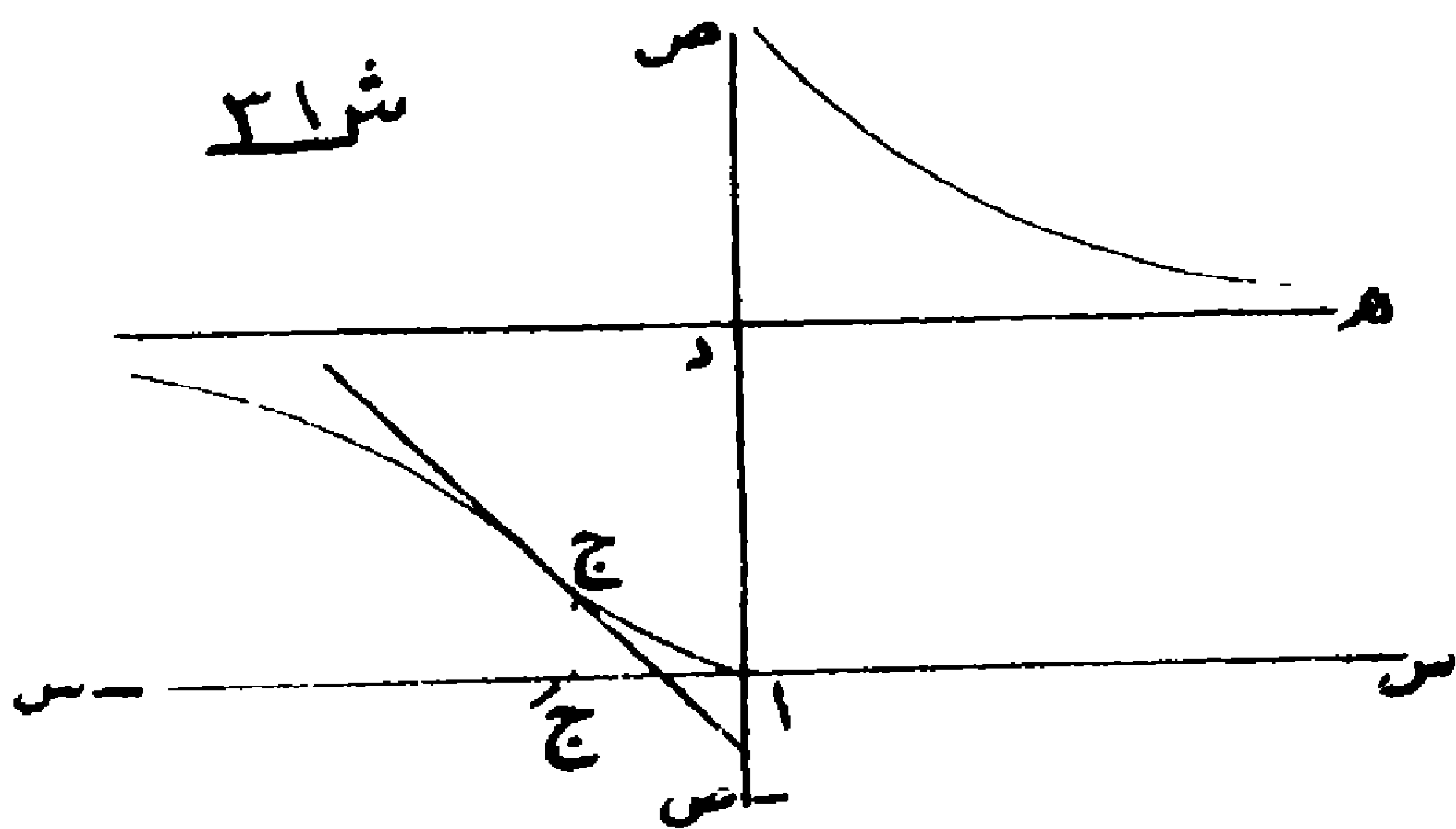
١٢٥ ・ قد تيسر لنا الآن بواسطة ما قدمناه كل ما يلزم لتحليل المنحنيات بمناقشة معادلاتها فلذا نحلها ان أمكن بالنسبة الى $س$ أو $ص$ فيتبين لنا من تغير المتعلقة سير المنحنى وعدد فروعه ونقط تقاطعه بالمحورين الاحداثيين الخ ثم تكون معادلة المماس فتدلنا على النقط التى فيها المماس موازى لمحور المعينات أو لمحور المرتبات على حسب كون المشتقة $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{٠}{}$ أو ∞ فغالبا هذه النقط تكون فى النهايات الكبرى أو الصغرى واذا كان للمنحنى عدة فروع غير نهائية نجد الخطوط التقريبية بالقواعد الموضحة فى الهندسة الجبرية (١) ثم نبحث عن $ء^٢ص$ وهذا لمعرفة جهة التحديب والتجويف ونقط التغير واخيرا نعين النقط الممتازة بالقواعد المذكورة فى هذا الباب ・ لتكن مثلا المعادلة

---

(١) لتكن $ص = ك س + ل$ معادلة خط تقريبى غير موازلمحور المرتبات فيمكن وضع معادلة فرع المنحنى الذى يقرب من الخط المذكور على الصورة $ص = ك س + ل + م (س)$ فتتعين $ك$ و $ل$ بجعل $س = \infty$ فى $\frac{ص}{س} = ك + \frac{ل + م (س)}{س}$ فيحدث منها $\frac{ص}{س} = ك$ ثم فى $ص - ك س = ل + م (س)$ فيحدث منها $(ص - ك س) = ل$ ・ وأما الموازى لمحور المرتبات فيتعين بمقادير $س$ التى بها تصير $ص$ لانهائية

$$ص = \propto^{\frac{1}{س}}$$

فاذافرضناان س = ٠ تصير ص = ∞ واذا يكون محور المرتبات (شـ ٣١) خطاتقريبيا لاحدفروع المنحنى وكلمازادت س من هذا المقدار الى ∞ تتناقص ص من ∞ الى الواحدفالخط هد الموازى لمحور



المعينات وبعده منه يساوى واحدا يكون خطاتقريبيا أيضا ويتضح بسهولة ان الفرع المذكور محروف من جهة الصادات الموجبة لان المشتقة الاولى وهى

$$\frac{ء ص}{ء س} = - \frac{1}{س^2} \propto^{\frac{1}{س}}$$

متصاعدة دائما ولنفرض الآن ان س تتناقص من الصفرالى − ∞ فلذا نبدل س بالكمية − س فى المعادلة المفروضة ونفرض انها تزيد من الصفرالى + ∞ فنجد

$$ص = \propto^{-\frac{1}{س}} = \frac{1}{\propto^{\frac{1}{س}}}$$

وبجعل س = ٠ تصير ص = ٠ وكلما تصاعدت س تتصاعد أيضا ص وتساوى الواحداذاصارت س لانهائية فنجدفرعايخرج من نقطة

الاصل ويمتد بين محور المعينات والخط ده الذى تقدم ذكره وهو خط تقربى لهذا الفرع أيضا فيشاهد ان ثالث النقطة نقطة وقوف • ولنضع فى المشتقة السابقة − س عوضا عن س فيحدث

$$\frac{ء ص}{ء س} = - \frac{1}{س^2} ه^{-\frac{1}{س}} = - \frac{\frac{1}{س^2}}{\frac{1}{ه^{س}}}$$

وبجعل س = ٠ يحدث

$$\frac{ء ص}{ء س} = - \frac{\infty}{\infty}$$

فاذا بحثنا عن المقدار الحقيقى نجد ان

$$\frac{ء ص}{ء س} = - \frac{٢}{\frac{1}{ه^{س}}}$$

فبفرض ان س = ٠ يكون $\frac{ء ص}{ء س} = ٠$ أعنى ان محور المعينات مماس للمنحنى فى نقطة الاصل وحيث ان الفرع المذكور ينتهى بان يصير محدبا من جهة خط التقريبى فينبغى ان توجد نقطة تغير تحصل بأخذ المشتقة الثانية وهى

$$\frac{ء^2 ص}{ء س^2} = ه^{\frac{1}{س}} \left(\frac{1}{س^3} + \frac{1}{س^4} \right)$$

فاذا وضع − س عوضا عن س يحدث

$$\frac{ء^2 ص}{ء س^2} = ه^{-\frac{1}{س}} \left(\frac{1}{س^4} - \frac{٢}{س^3} \right)$$

واذا جعلنا $\frac{1}{س^4} - \frac{٢}{س^3} = ٠$ أعنى $س = \frac{1}{٢}$ يكون $\frac{ء^2 ص}{ء س^2} = ٠$

ونصير $ص = \frac{1}{ه^2}$ فلو أخذنا $اَجَ = \frac{1}{٢}$ ، $جَ ج = \frac{1}{ه^2}$ لوجدنا النقطة ج وهى نقطة التغير

(تمرينات)

المطلوب تحليل المنحنيات المبينة بالمعادلات الآتية

١ • ص = جا س (المنحنى الجيبى)

٢ • ص = ظا س (القاطعى)

٣ . $ص^٣ - ٣ ح س ص + س^٣ = ٠$ (ورقة ديكارت)

٤ . $ص - ٩٦ ح^٢ ص^٢ + ١٠٠ ح^٢ س^٢ - س^٤ = ٠$ (المنحنى العفريتى)

الباب التاسع عشر

(فى المنحنيات ذات الانحنائين)

١٢٦ . المنحنى ذو الانحنائين هو الذى لا توجد كل نقطه فى سطح مستوى (١) وقد علم فى الهندسة الجبرية ان كل معادلة ذات ثلاث متغيرات كالمعادلة

$$ق (س و ص و ط) = ٠$$

تبين سطحا مرسوما بالنسبة الثلاثة محاور اس و اص و اط وشكله متعلق بالارتباط الكائن بين المتغيرات س و ص و ط

وان كل معادلة ذات متغيرتين مثل

$$ق (س و ص) = ٠$$

تبين سطحا اسطوانيا اضلاعه موازية لمحور الاحداثات المحذوفة

وان كل معادلتين مثل

$$ق (س و ص و ط) = ٠ و م (س و ص و ط) = ٠$$

اذا اعتبرتا فى آن واحد دلتا على الخط المشترك للسطحين المبينين بكلتيهما مستقيما كان أو منحنيا فالمنحنيات ذات الانحنائين تتعين حينئذ بمعادلتين كالمعادلتين الاخريين أو بواسطة معادلتين مثل

$$س = م_١ (ط) و ص = م_٢ (ط)$$

وهى أسهل طريقة

(فى المماس)

١٢٧ . لتعتبر ط متغيرة مستقلة ولتكن

$$س = م (ط) و ص = م (ط) \quad (١)$$

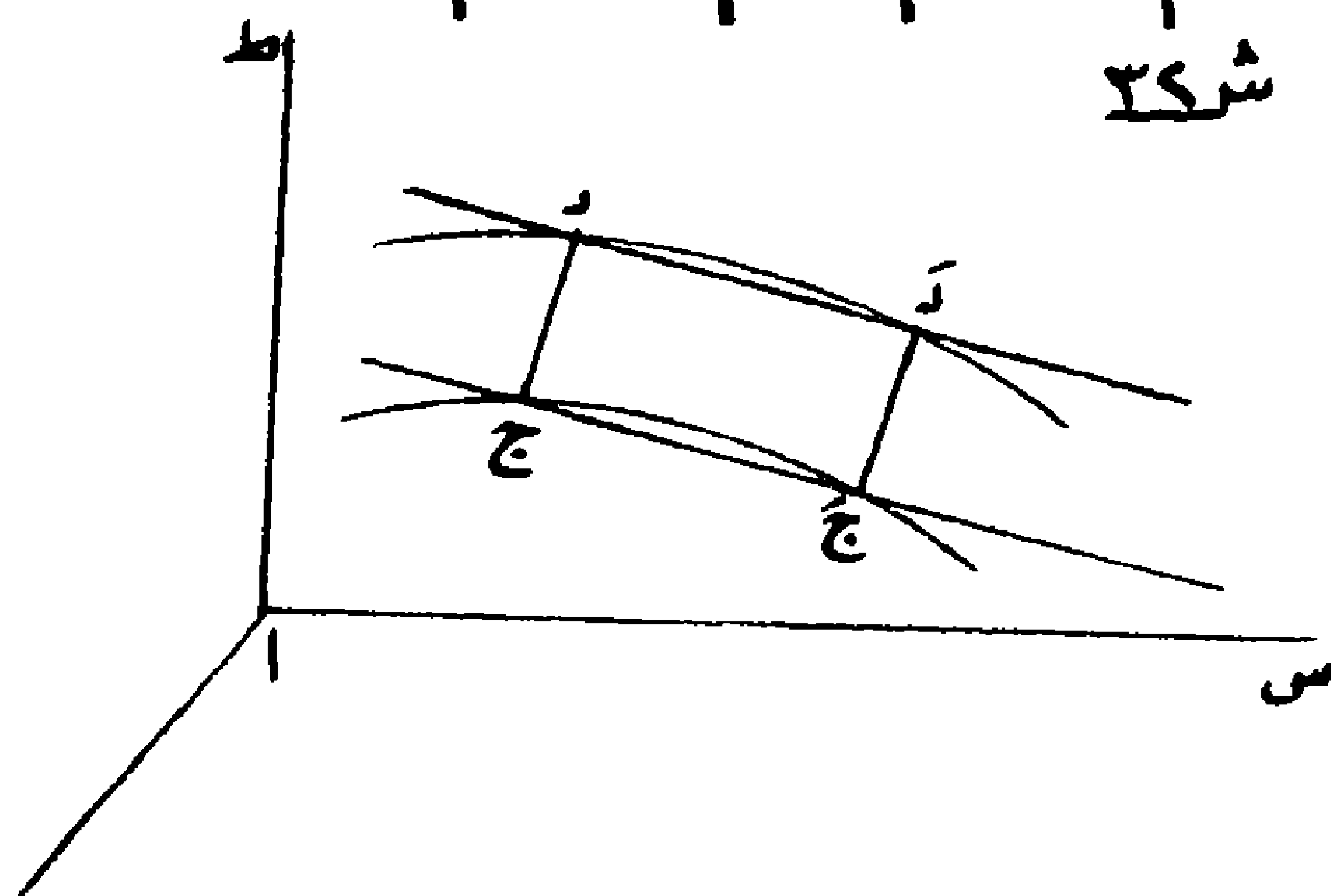
معادلتى منحنى فى الفراغ فنرى بسهولة انهما تبينان مسقطى المنحنى المذكور على المستويين الاحداثيين سط و صط .

---

(١) ستري فى المطلب ١٣١ سبب هذه التسمية

لتكن س_1 و ص_1 و ط_1 احداثات نقطة ج مثلا (ش ٣٢) و س_1 + ف س_1 و ص_1 + ف ص_1 و ط_1 + ف ط_1

شكل ٣٢



احداثات نقطة أخرى جَ فمعادلتا القاطع ج جَ تكونان حينئذ

$$\text{س} - \text{س}_1 = \frac{\text{ف س}_1}{\text{ف ط}_1}(\text{ط} - \text{ط}_1) \quad \text{و} \quad \text{ص} - \text{ص}_1 = \frac{\text{ف ص}_1}{\text{ف ط}_1}(\text{ط} - \text{ط}_1)$$

فاذا فرضنا ان النقطة جَ تقرب من ج يقرب الخط ج جَ من المماس في ج وتقرب $\frac{\text{ف س}_1}{\text{ف ط}_1}$ و $\frac{\text{ف ص}_1}{\text{ف ط}_1}$ من نهايتهما $\frac{\partial \text{س}}{\partial \text{ط}}$ و $\frac{\partial \text{ص}}{\partial \text{ط}}$ اللتين توجدان باخذ مشتقي المعادلتين المفروضتين (١) فمعادلتا المماس تكونان حينئذ

$$\text{س} - \text{س}_1 = \frac{\partial \text{س}}{\partial \text{ط}}(\text{ط} - \text{ط}_1) \quad \text{و} \quad \text{ص} - \text{ص}_1 = \frac{\partial \text{ص}}{\partial \text{ط}}(\text{ط} - \text{ط}_1) \qquad (٢)$$

ومن شكله ارى ان مساقط المماس مماسة لمساقط المنحني

واذا أريد بيان المنحني بمعادلتين ذات ثلاث متغيرات مثل

$$\text{م}(\text{س و ص و ط}) = ٠ \quad \text{و} \quad \text{مَ}(\text{س و ص و ط}) = ٠ \quad ∴$$

نجد للمماس المعادلتين

$$\frac{\partial \text{م}}{\partial \text{س}}(\text{س} - \text{س}_1) + \frac{\partial \text{م}}{\partial \text{ص}}(\text{ص} - \text{ص}_1) + \frac{\partial \text{م}}{\partial \text{ط}}(\text{ط} - \text{ط}_1) = ٠$$

$$\frac{\text{ى م}}{\text{ى س}}(\text{س} - \text{س}_1) + \frac{\text{ى م}}{\text{ى ص}}(\text{ص} - \text{ص}_1) + \frac{\text{ى م}}{\text{ى ط}}(\text{ط} - \text{ط}_1) = 0$$

١٢٨. لنفرض الآن ان المستويات الاحداثية تكون متعامدة ونرمز بالرموز سَ و صَ و طَ لزوايا الوتر ج جَ والمحاور اس و اص و اط فاذا أنشأنا متوازى المستطيلات د ج و هـ (شـ ٣٣) الحاصل

شـ ٣٣

من تلاقى المستويات الست المارة بالنقطتين ج جَ الموازية للمحاور الاحداثية تكون اضلاعه

$$\text{د ج} = \text{ف س}_1 \quad \text{و} \quad \text{ف ج} = \text{ف ص}_1 \quad \text{و} \quad \text{هـ ج} = \text{ف ط}_1$$

ومنه كما هو معلوم

$$\text{ج جَ} = \sqrt{\text{ف س}_1^2 + \text{ف ص}_1^2 + \text{ف ط}_1^2}$$

ومن المثلث د ج جَ القائم الزاوية يحدث جتا د ج جَ $= \frac{\text{د ج}}{\text{ج جَ}}$ أعنى

$$\text{جتا سَ} = \frac{\text{ف س}_1}{\sqrt{\text{ف س}_1^2 + \text{ف ص}_1^2 + \text{ف ط}_1^2}} = \frac{\frac{\text{ف س}_1}{\text{ف ط}_1}}{\sqrt{\left(\frac{\text{ف س}_1}{\text{ف ط}_1}\right)^2 + \left(\frac{\text{ف ص}_1}{\text{ف ط}_1}\right)^2 + 1}}$$

ونجد أيضا

$$\text{جتا صَ} = \frac{\dfrac{\text{ف ص}_{١}}{\text{ف ط}_{١}}}{\sqrt{\left(\dfrac{\text{ف س}_{١}}{\text{ف ط}_{١}}\right)^{٢} + \left(\dfrac{\text{ف ص}_{١}}{\text{ف ط}_{١}}\right)^{٢} + ١}} \quad \text{و}$$

$$\text{جتا ظَ} = \frac{١}{\sqrt{\left(\dfrac{\text{ف س}_{١}}{\text{ف ط}_{١}}\right)^{٢} + \left(\dfrac{\text{ف ص}_{١}}{\text{ف ط}_{١}}\right)^{٢} + ١}}$$

فاذا قربت ف ط من الصفر تقرب جَ من ج وتقرب الزوايا سَ و صَ و ظَ من الزوايا س و ص و ظ الحاصلة بين المماس والمحاور فاذا يكون

$$\text{جتا س} = \frac{\dfrac{\text{ى س}}{\text{ى ط}}}{\sqrt{\dfrac{\text{ى س}^{٢}}{\text{ى ط}^{٢}} + \dfrac{\text{ى ص}^{٢}}{\text{ى ط}^{٢}} + ١}} \quad \text{و جتا ص} = \frac{\dfrac{\text{ى ص}}{\text{ى ط}}}{\sqrt{\dfrac{\text{ى س}^{٢}}{\text{ى ط}^{٢}} + \dfrac{\text{ى ص}^{٢}}{\text{ى ط}^{٢}} + ١}}$$

$$\text{و جتا ظ} = \frac{١}{\sqrt{\dfrac{\text{ى س}^{٢}}{\text{ى ط}^{٢}} + \dfrac{\text{ى ص}^{٢}}{\text{ى ط}^{٢}} + ١}}$$

ومنه

$$(٣)\quad \text{جتا س} = \frac{\text{ى س}}{\sqrt{\text{ى س}^{٢} + \text{ى ص}^{٢} + \text{ى ط}^{٢}}} \quad \text{و جتا ص} = \frac{\text{ى ص}}{\sqrt{\text{ى س}^{٢} + \text{ى ص}^{٢} + \text{ى ط}^{٢}}}$$

$$\text{و جتا ظ} = \frac{\text{ى ط}}{\sqrt{\text{ى س}^{٢} + \text{ى ص}^{٢} + \text{ى ط}^{٢}}}$$

(فى المستوى العمودى)

١٢٩ . المستوى العمودى لمنحن هو المستوى العمودى على المماس فى نقطة التماس

لتكن $\text{س}_{١}$ و $\text{ص}_{١}$ و $\text{ط}_{١}$ احداثيات نقطة التماس فكل مستو مار بها يكون له معادلة كهذه

$$\text{ا}\,(\text{س}-\text{س}_{١})+\text{ب}\,(\text{ص}-\text{ص}_{١})+\text{ج}\,(\text{ط}-\text{ط}_{١})=٠$$

ولكي يكون عمودا على المماس المبين بالمعادلتين

$$\text{س}-\text{س}_{١}=\frac{\text{دس}}{\text{دط}}\,(\text{ط}-\text{ط}_{١})\ \ \text{و}\ \ \text{ص}-\text{ص}_{١}=\frac{\text{دص}}{\text{دط}}\,(\text{ط}-\text{ط}_{١})$$

ينبغي ان يكون

$$\frac{\text{ا}}{\text{ج}}=\frac{\text{دس}}{\text{دط}}\ \ \text{و}\ \ \frac{\text{ب}}{\text{ج}}=\frac{\text{دص}}{\text{دط}}$$

فمعادلة المستوى العمودي تصير حينئذ

$$(\text{س}-\text{س}_{١})\,\frac{\text{دس}}{\text{دط}}+(\text{ص}-\text{ص}_{١})\,\frac{\text{دص}}{\text{دط}}+\text{ط}-\text{ط}_{١}=٠$$

او

$$(\text{س}-\text{س}_{١})\,\text{دس}+(\text{ص}-\text{ص}_{١})\,\text{دص}+(\text{ط}-\text{ط}_{١})\,\text{دط}=٠\qquad(٤)$$

وهو المطلوب

(في تفاضل قوس المنحني)

١٣٠ لتكن (شـ ٣٤) ب بَ منحنيا ما منسوبا بالنسبة للمحاور ا س و ا ص و ا ط فاذا رمزنا بالحرف ى لطول القوس المعتبر من نقطة ثابتة ب الى النقطة ج ذات الاحداثيات $\text{س}_{١}$ و $\text{ص}_{١}$ و $\text{ط}_{١}$ تكون ى متعلقة بالمتغيرات المذكورة ولنفرض ان $\text{س}_{١}+\text{ف س}_{١}$ و $\text{ص}_{١}+\text{ف ص}_{١}$ و $\text{ط}_{١}+\text{ف ط}_{١}$ تكون احداثيات نقطة ثانية مثل جَ تكون قريبة من الاولى و ددَ

شـ ٣٤

مسقط القوس ج جَ على المستوى س ص ونرسم المستوى المار بالمستقيم ج د والمماس للاسطوانة المسقطية ج جَ دد َ في هذا الخط فيشتمل هذا المستوى على المماس جً للمنحنى ج جَ وعلى الخط دً المماس للمنحنى د دَ واذا بسطنا الاسطوانة عليه فالقوس ج جَ يصير القوس المستوى ج جً والقوس د دَ يؤول الى الخط المستقيم د دً ونجعل قوس ج جَ = ف ى و قوس د دَ = ف ىَ ونرسم ج هـ موازيا للخط د دً فحيث ان بعدى النقطتين ج و جً من السطح س ص متساويان يكون جً هـ = ف ط

ولكن ج هـ = د دً = ف ىَ فاذا يكون وتر ج جً = $\sqrt{ف ى^٢ + ف ط^٢}$

ونجد بسهولة ان وتر د دَ = $\sqrt{ف س^٢ + ف ص^٢}$ وقد تقدم لنا ان نهاية نسبة قوس مستوى لوتره تساوى واحدا فنهايتا الكميتين

$$\frac{ف ى}{\sqrt{ف ى^٢ + ف ط^٢}} \quad و \quad \frac{ف ىَ}{\sqrt{ف س^٢ + ف ص^٢}}$$

تكونان حينئذ واحدا

لنفرض ان الثانية تكون مساوية للكمية ع مثلا فيحدث

$$ف ى^٢ = ع^٢ (ف س^٢ + ف ص^٢)$$

وبوضع هذا المقدار في الاولى ينتج

$$\frac{ف ى}{\sqrt{ع^٢ (ف س^٢ + ف ص^٢) + ف ط^٢}}$$

او

$$\frac{\frac{ف ى}{ف ط}}{\sqrt{ع^٢ \left[\left(\frac{ف س}{ف ط}\right)^٢ + \left(\frac{ف ص}{ف ط}\right)^٢\right] + ١}}$$

ومنها

$$\frac{\frac{\partial ى}{\partial ط}}{\sqrt{\frac{\partial س^٢}{\partial ط^٢} + \frac{\partial ص^٢}{\partial ط^٢} + ١}} = ١$$

أو $\frac{دق}{دط} = \sqrt{\frac{دس^2}{دط^2} + \frac{دص^2}{دط^2} + 1}$

ومنها $دق = \sqrt{دس^2 + دص^2 + دط^2}$

وهو المطلوب

(ملحوظ) بواسطة هذا القانون يمكن وضع القوانين (٣) على هذه الصور

حتا س $= \frac{دس}{دق}$ و حتا ص $= \frac{دص}{دق}$ و حتا ط $= \frac{دط}{دق}$ (٦)

(في الانحناء)

١٣١ . ليكن (شكل ٣٥) ب بَ منحنيا في الفراغ ولنفرض عليه نقطتين ج جَ متقاربتين جدا

شكل ٣٥

فاذا رسمنا المماسين ج م و جَ مَ يمكن اعتبارهما في مستوٍ واحد يسمى بالمستوى الالتصاقي (١) للمنحنى في النقطة ج ولا صعوبة في ذلك اذا كان المنحنى المفروض مستويا وأما اذا كان ذا انحنائين فنخرج من النقطة ج خط ج مً موازيا للمماس جَ مَ فيكون بعد المستوى مً ج م من المماس جَ مَ كمية صغيرة جدا في النهاية يمكن الفرض المذكور وعلى العموم لكل منحن

(١) الخط العمودي على المنحني الموجود في المستوى الالتصاقي يسمى بالعمود الاصلي

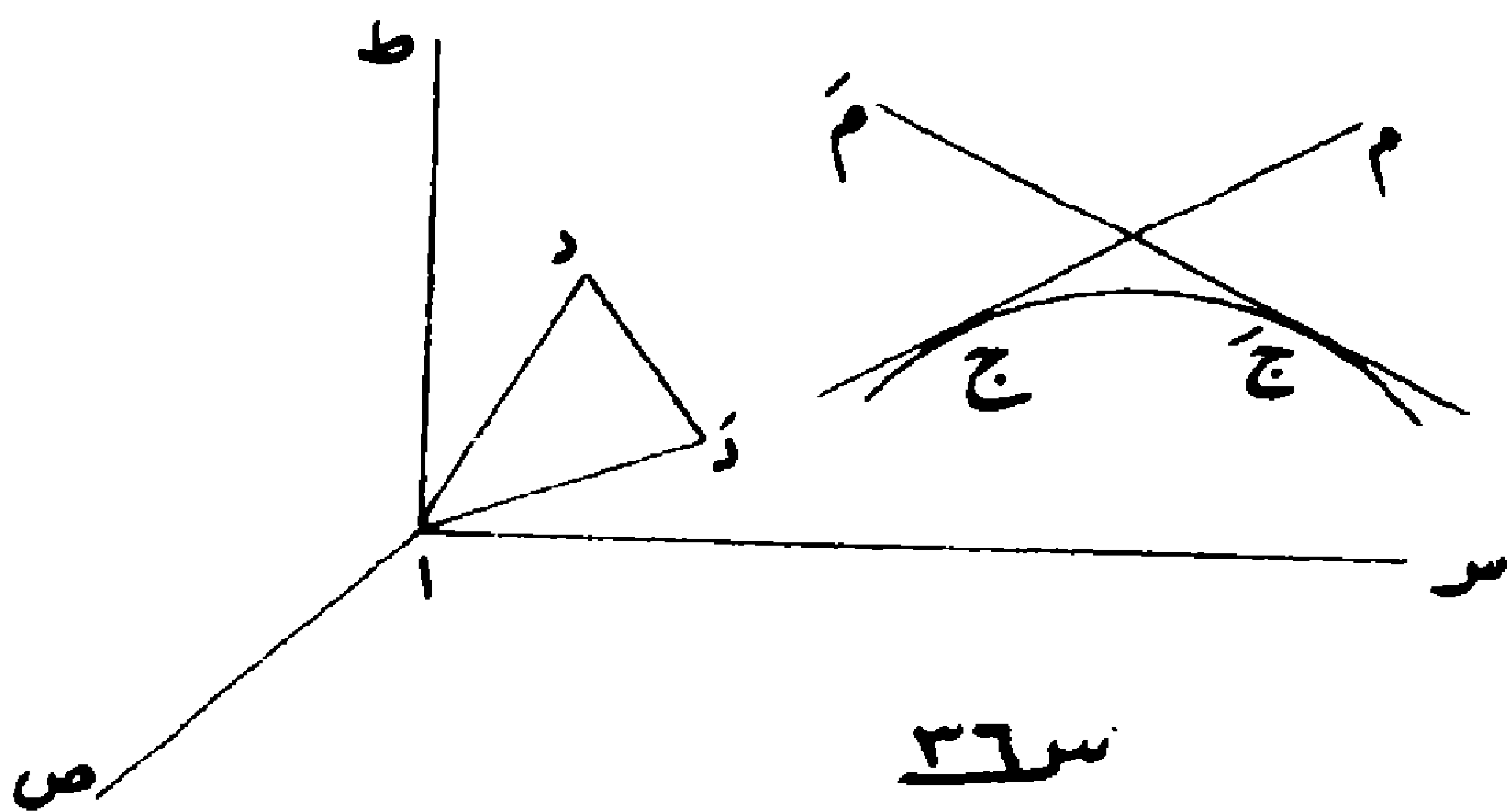
فى الفراغ انحناآن الاول هو انحناؤه فى مستويه الالتصاقى و يتعين نصف قطره بالقانون المعلوم

$$\frac{١}{نق} = \frac{ى}{ك}$$

والثانى هو نسبة الزاوية ز (وتسمى زاوية الالتواء) الحاصلة بين المستويين الالتصاقيين فى ج و جَ الى القوس ججَ = ك فيتعين نصف قطره بالمعادلة

$$\frac{١}{نقَ} = \frac{ز}{ك}$$

١٣٢ . لنبحث عن مقدار نق ولذا ينبغى لنا ان نعين زاوية التماس ى فنقول لتكن س و ص و ظ زوايا المماس للمنحنى فى النقطة ج مع المحاور الاحداثية (شـ ٣٦)



شـ ٣٦

و سَ + ف س و ص + ف ص و ظ + ف ظ زوايا المماس جَ مَ مع المحاور المذكورة وليكن اد و ادَ خطين موازيين لهذين المماسين فاذا جعلنا اد = ادَ = ١ يكون المثلث ادد َ متساوى الساقين والزاوية د ا دَ تعادل الزاوية ى ويحدث

$$دد = ٢ \text{ حا } \frac{ن}{٢}$$

وبفرض ن كمية صغيرة يمكن ان يجعل

$$دد' = ن$$

ويرى بسهولة ان احداثات النقطة د هى جتا س و جتا ص و جتا ظ

فاحداثات د' تكون حينئذ

$$\text{جتا س} + ٥ \text{ جتا س}$$
$$\text{جتا ص} + ٥ \text{ جتا ص}$$
$$\text{جتا ظ} + ٥ \text{ جتا ظ}$$

واذا بعدهما يكون

$$دد' = ن = \sqrt{(٥ \text{ جتا س})^٢ + (٥ \text{ جتا ص})^٢ + (٥ \text{ جتا ظ})^٢}$$

فبوضع هذا المقدار فى القانون

$$\frac{١}{نق} = \frac{ن}{٥ق}$$

نجد

$$\frac{١}{نق} = \sqrt{\left(\frac{٥ \text{ جتا س}}{٥ق}\right)^٢ + \left(\frac{٥ \text{ جتا ص}}{٥ق}\right)^٢ + \left(\frac{٥ \text{ جتا ظ}}{٥ق}\right)^٢}$$

وهو المطلوب

(تطبيقات على المنحنى البرعى)

١٣٣ • المنحنى البرعى هو منحن مرسوم على اسطوانة قائمة ذات قاعدة مستديرة بحيث يقطع اضلاعها فيحدث معها اى الاضلاع زوايا متساوية وكيفية انشائه انه يلف على الاسطوانة مستو مرسوم فيه مستقيم ليس عمودا على الاضلاع المذكورة

لنفرض ان المحاور الاحداثية تكون (ش٣٧) محور الاسطوانة اط والمستقيم اب (المار بالنقطة ب التى فيها يلاقى المنحنى بج المستوى

سـ صـ) والمستقيم اصـ العمودى على المستوى سـ اط

شـ ٣٧

وليكن $س_1$ و $ص_1$ و $ط_1$ احداثيات النقطة جَ الكائنة على المنحنى و نق نصف قطر الاسطوانة وَ ن الزاوية ب ا هـ و ء ظل الزاوية جَ بَ سـ فاذا جعلنا بهـَ مساويا القوس بهـ = نق ن يحدث فى المثلث بَ جَ هـَ القائم الزاوية

$$جَهـَ = بَهـَ \ ظا \ جَبَهـَ \quad أعنى \quad ط_1 = ء \ نق \ ن \qquad (١)$$

(لان جَهـَ = جهـ بالعمل) . وفى المثلث اهـ و نجد

$$\therefore \ س_1 = نق \ جتا \ ن \quad و \quad ص_1 = نق \ حا \ ن \qquad (١)$$

وبمحو ن من بين هذه المعادلات تحدث لمساقط المنحنى على المستويات الاحداثية المعادلات

$$س_1^2 + ص_1^2 = نق^2 \quad و \quad س_1 = نق \ جتا \frac{ط_1}{ء \ نق} \quad و \quad ص_1 = نق \ حا \frac{ط_1}{ء \ نق} \qquad (٢)$$

اذا فرضنا ن متغيرة مستقلة وأخذنا تفاضل المعادلات (١) نجد

$$\frac{ءس_1}{ءن} = - نق \ حا \ ن = - ص_1 \ ، \ \frac{ءص_1}{ءن} = نق \ جتا \ ن = س_1 \ ، \ \frac{ءط_1}{ءن} = ء \ نق \qquad (٣)$$

ومنها

$$\frac{\delta س_1}{\delta ط_1} = -\frac{ص_1}{ء نق} \quad و \quad \frac{\delta ص_1}{\delta ط_1} = \frac{س_1}{ء نق}$$

١٣٤ . لنضع في القانونين (٢) من مطلب ١٢٧ مقداري $\frac{\delta س_1}{\delta ط_1}$ و $\frac{\delta ص_1}{\delta ط_1}$ السابقين فيحدث لمعادلتي المماس في النقطة ج

$$س - س_1 = -\frac{ص_1}{ء نق}(ط - ط_1) \quad و \quad ص - ص_1 = \frac{س_1}{ء نق}(ط - ط_1)$$

وبحذف $ط - ط_1$ نجد

$$(س - س_1)\, س_1 + (ص - ص_1)\, ص_1 = ٠ \quad أو \quad س\, س_1 + ص\, ص_1 = نق^2$$

فيعلم من المعادلة الاخيرة ان مسقط المماس على المستوى س ص مماس بقاعدة الاسطوانة في النقطة هـ لتكن م نقطة تلاقي المستوى س ص بالمماس للبريمي فنجد في المثلثين القائمي الزاوية بَ جَ هـ و م جـ هـ ان م هـ = بَ هـ أعني ان م هـ مساو للقوس ب هـ ومن هنا يظهر ان المنحني م ج الذي ترسمه النقطة م حينما يتحرك المماس م ج يكون منتشر محيط قاعدة الاسطوانة فهو حينئذ انتشار محيط الدائرة المذكورة ولايجاد معادلته نفرض ط = ٠ في معادلتي المماس ثم نمحي الكميات $س_1$ و $ص_1$ و $ط_1$ بواسطة معادلات المنحني البريمي فنجد

$$س\ جتا \frac{\sqrt{س^2 + ص^2 - نق^2}}{نق} + ص\ حا \frac{\sqrt{س^2 + ص^2 - نق^2}}{نق} = نق$$

(ملحوظ) المنحني م ج المذكور هو أيضا خط تقاطع السطح المسمى بالسطح البريمي قابل البسط وهو سطح ناشئ من تحرك مماس على المنحني البريمي

١٣٥ . اذا وضعنا مقادير $\delta س$ و $\delta ص$ و $\delta ط$ المعلومة من المعادلات (٣) في القانون (٥) من المطلب ١٣٠ نجد

$د ن = نق \ د ل \sqrt{١ + ء^٢}$ (٤)

وهو تفاضل طول قوس من البريمى فجيوب متممات الزاوية الناقصة منه والمحاور الاحداثية تكون حينئذ

$حتا س = \frac{د س}{د ن} = - \frac{حا ل}{\sqrt{١ + ء^٢}}$ و $حتا ص = \frac{د ص}{د ن} = \frac{حتا ل}{\sqrt{١ + ء^٢}}$

$حتا ط = \frac{د ط}{د ن} = \frac{ء}{\sqrt{١ + ء^٢}}$ (٥)

فن المعادلة الاخيرة يعلم كما تقدم فى التعريف ان زاوية المماس والمحور ا ط الموازى لاضلاع الاسطوانة كمية ثابتة ومن المعادلات (٤) و (٥) يستخرج

$\frac{د \ حتا س}{د ن} = - \frac{حتا ل}{(١ + ء^٢) نق}$ ، $\frac{د \ حتا ص}{د ن} = - \frac{حا ل}{(١ + ء^٢) نق}$ و

$\frac{د \ حتا ء}{د ن} = ٠$

فاذا وضعنا هذه المقادير فى قانون نصف قطر الانحناء الاول نرى أنه يعادل $(١ + ء^٢)$ نق أعنى أنه كمية ثابتة

الباب العشرون

(فى المستوى المماس للسطوح المنحنية)

١٣٦ • لتكن $س_١$ و $ص_١$ و $ط_١$ احداثيات النقطة ج الكائنة على السطح المنحنى المبين بالمعادلة م (س و ص و ط) = ٠ فاذا فرضنا ان سطحا آخر م (س و ص و ط) = ٠ يمر من النقطة المذكورة فيتقاطع السطحان على خط منحنى يتعين بالمعادلتين

م (س و ص و ط) = ٠ و م (س و ص و ط) = ٠

واذا رسمنا فى النقطة ج مماسا لهذا المنحنى فتكون معادلتاه (مطلب ١٢٦)

$\frac{د م}{د س}(س - س_١) + \frac{د م}{د ص}(ص - ص_١) + \frac{د م}{د ط}(ط - ط_١) = ٠$ (١)

$$(\text{س}-\text{س}_{1})\frac{\partial \text{م}}{\partial \text{س}}+(\text{ص}-\text{ص}_{1})\frac{\partial \text{م}}{\partial \text{ص}}+(\text{ط}-\text{ط}_{1})\frac{\partial \text{م}}{\partial \text{ط}}=\cdot \qquad (٢)$$

وكلتاهما تبين مستويا مارا بذلك المماس

وحيث ان المعادلة (١) خالصة من المتعلقة م فالمستوى المبين بها غير متعلق بالمنحنى المار بالنقطة ج ومن هنا يعلم انه اذا رسم على السطح المنحنى المفروض عدة خطوط منحنية مارة بالنقطة ج فان كل المماسات لهذه المنحنيات تكون فى المستوى المبين بالمعادلة (١) وهو حينئذ المستوى المماس

١٣٧ . الخط العمودى على السطح فى ج هو العمود على المستوى المماس فى تلك النقطة

لتكن

$$\text{س}-\text{س}_{1}=\text{ح}\,(\text{ط}-\text{ط}_{1}) \quad ، \quad \text{ص}-\text{ص}_{1}=\text{ء}\,(\text{ط}-\text{ط}_{1})$$

معادلتيه فلتعيين الكميتين ح ، ء نلاحظ ان مسقطيه على المستويين س ط ، ص ط عموديان على أثرى المستوى المماس فى المستويين المذكورين فاذا يكون

$$\text{ح}=\frac{\frac{\partial \text{م}}{\partial \text{س}}}{\frac{\partial \text{م}}{\partial \text{ط}}} \quad ، \quad \text{ء}=\frac{\frac{\partial \text{م}}{\partial \text{ص}}}{\frac{\partial \text{م}}{\partial \text{ط}}}$$

وبهذا تصير المعادلتان السابقتان

$$\text{س}-\text{س}_{1}=\frac{\frac{\partial \text{م}}{\partial \text{س}}}{\frac{\partial \text{م}}{\partial \text{ط}}}(\text{ط}-\text{ط}_{1}) \quad ، \quad \text{ص}-\text{ص}_{1}=\frac{\frac{\partial \text{م}}{\partial \text{ص}}}{\frac{\partial \text{م}}{\partial \text{ط}}}(\text{ط}-\text{ط}_{1})$$

ويمكن وضعهما على الصورة

$$\frac{\text{س}-\text{س}_{1}}{\frac{\partial \text{م}}{\partial \text{س}}}=\frac{\text{ص}-\text{ص}_{1}}{\frac{\partial \text{م}}{\partial \text{ص}}}=\frac{\text{ط}-\text{ط}_{1}}{\frac{\partial \text{م}}{\partial \text{ط}}}$$

واذا رمزنا بالحروف سَ ، صَ ، طَ للزوايا الحاصلة بين العمود والمحاور الاحداثية نجد

$$\frac{\text{حتا } س'}{\frac{\partial م}{\partial س}}=\frac{\text{حتا } ص'}{\frac{\partial م}{\partial ص}}=\frac{\text{حتا } ط'}{\frac{\partial م}{\partial ط}}=\frac{\sqrt{\text{حتا}^2 س'+\text{حتا}^2 ص'+\text{حتا}^2 ط'}}{\sqrt{\left(\frac{\partial م}{\partial س}\right)^2+\left(\frac{\partial م}{\partial ص}\right)^2+\left(\frac{\partial م}{\partial ط}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{\ }}$$

(في الموشور والاسطوانة المحيطين بسطح منحنى)

١٣٨ • لتكن ج (ح، ء، ه) و ج' (ح'، ء'، ه') نقطتين معلومتين باحداثاتهما وليكن المرام تعيين المستوى المار بهما المماس للسطح المبين بالمعادلة $م(س، ص، ط) = ٠$ فنقول ان كل مستو مماس للسطح المفروض تكون معادلته

$$(س - س_1)\frac{\partial م}{\partial س}+(ص - ص_1)\frac{\partial م}{\partial ص}+(ط - ط_1)\frac{\partial م}{\partial ط}=٠$$

وحيث انه يلزم ان يمر بالنقطتين ج و ج' ينبغي ان يكون

$$(ح - س_1)\frac{\partial م}{\partial س}+(ء - ص_1)\frac{\partial م}{\partial ص}+(ه - ط_1)\frac{\partial م}{\partial ط}=٠$$

$$(ح' - س_1)\frac{\partial م}{\partial س}+(ء' - ص_1)\frac{\partial م}{\partial ص}+(ه' - ط_1)\frac{\partial م}{\partial ط}=٠$$

فبواسطة هاتين المعادلتين والمعادلة $م(س_1، ص_1، ط_1) = ٠$ نجد مقادير $س_1$ و $ص_1$ و $ط_1$ التي هي احداثات نقطة التماس

ومن هنا يتضح انه بنقطة واحدة ج (ح، ء، ه) تمر غالبا مستويات مماسات لا يحصى عددها وان احداثات نقطة التماس توافق المعادلتين

$$(ح - س)\frac{\partial م}{\partial س}+(ء - ص)\frac{\partial م}{\partial ص}+(ه - ط)\frac{\partial م}{\partial ط}=٠ \qquad (٣)$$

م (س و ص و ط) = ٠

اللتين يبينان حينئذ منحنى الماس

ويظهر بسهولة ان المستقيمات التي تصل النقطة ج بنقط المنحنى المذكور تمس السطح المفروض وانها تشكل موشورا محيطا به تتعين معادلته أي الموشور بحذف س و ص و ط من معادلتي أحدها نه المستقيمات ومعادلتي منحنى المماس

١٣٩ ٠ لنفرض ان النقطة ج (ح و ى و هـ) تتحرك على المستقيم المبين بالمعادلتين

س = ءط و ص = غ ط (١)

فيكون ح = ءهـ و ى = غ هـ

وتصير المعادلة (٣)

$$(ء - \frac{س}{هـ}) \frac{ى م}{ى س} + (غ - \frac{ص}{هـ}) \frac{ى م}{ى ص} + (١ - \frac{ط}{هـ}) \frac{ى م}{ى ط} = ٠$$

فلو فرض ان هـ تزداد الى ما لانهاية لآلت هذه المعادلة الى

$$ء \frac{ى م}{ى س} + غ \frac{ى م}{ى ص} + \frac{ى م}{ى ط} = ٠$$

وهي مع معادلة السطح يبينان المنحنى الذي يكون فيه السطح مموسا بالاسطوانة التي اضلاعها موازية للخط (١) ٠

ويرى بسهولة ان المعادلة الاخيرة تدل على ان المستوى المماس موازٍ للخط المذكور (١) فهي تبين حينئذ سطحا محتويا على كل نقط التماس فللتحصيل على معادلة الاسطوانة المحيطة بالسطح يكفي حذف س و ص و ط من المعادلتين

$$س - س_١ = ء (ط - ط_١) \quad و \quad ص - ص_١ = غ (ط - ط_١)$$

اللتين يبينان أحد اضلاع الاسطوانة ومن معادلتي منحنى التماس

(تطبيق)

لتكن المعادلة ذات الدرجة الثانية

$$ا س^٢ + اَ ص^٢ + اً ط^٢ + ٢ ب س + ٢ بَ ص + ٢ بً ط + ف = ٠$$

فنجد

$$\frac{دم}{دس} = ٢(اس+ب) ، \frac{دم}{دص} = ٢(اَص+بَ) ، \frac{دم}{دط} = ٢(اًط+بً)$$

فمعادلة المستوى المماس تكون حينئذ

$$(اس_1+ب)(س-س_1) + (اَص_1+بَ)(ص-ص_1) +$$
$$(اًط_1+بً)(ط-ط_1) = ٠$$

ويمكن وضعها على الصورة

$$(اس_1+ب)\,س + (اَص_1+بَ)\,ص + (اًط_1+بً)\,ط$$
$$+ بس_1 + بَص_1 + بًط_1 + ف = ٠$$

وبتبديل س و ص و ط بالكميات ح و ء و هـ تحدث المعادلة

$$(اس_1+ب)\,ح + (اَص_1+بَ)\,ء + (اًط_1+بً)\,هـ$$
$$+ بس_1 + بَص_1 + بًط_1 + ف = ٠$$

وهي ذات الدرجة الاولى بالنسبة الى س و ص و ط فينتج من هنا ان الموشور المحيط بالسطح ذي الدرجة الثانية يمسه على منحن مستو .
والاسطوانة المحيطة التي اضلاعها موازية للمستقيم

$$س = ءط ، ص = عط$$

تمس السطح المفروض على منحن موجود في المستوى

$$(اس+ب)\,ء + (اَص+بَ)\,ع + اًط + بً = ٠$$

وتكون معادلتا العمود على السطح

$$\frac{س-س_1}{اس_1+ب} = \frac{ص-ص_1}{اَص_1+بَ} = \frac{ط-ط_1}{اًط_1+بً}$$

الباب الحادى والعشرون
فى المنحنيات الغلافية

١٤٠ . لتكن م (س و ص و ج) = ٠ معادلة منحنٍ مستوٍ مشتملة على كمية غير معينة ج ولتكن ى كمية صغيرة موجبة او سالبة فاذا فرضنا على التوالى ان ج تأخذ المقادير

ج + ى و ج + ٢ ى و ج + ٣ ى و ج + ٤ ى و ٠٠٠٠٠

تحدث عدة منحنيات (شـ ٣٨) ج و جَ و جً و ٠٠٠ تتقاطع غالبا اثنين اثنين فى النقط د و دَ و دً و ٠٠٠٠

شـ ٣٨

ويتعين احداثيا النقطة ج بواسطة المعادلتين

م (س و ص و ج) = ٠ و م (س و ص و ج + ى) = ٠ (١)

وبتبديل ج فيهما على التوالى بالمقادير ج + ى و ج + ٢ ى و ج + ٣ ى و ٠٠٠٠ يتعين احداثيا كل من النقط الاخر جَ و جً و جٌ و ٠٠٠٠ فينتج من هنا انه اذا محونا من المعادلتين السابقتين الكمية ج تحدث معادلة كهذه مَ (س و ص و ى) = ٠ تبين منحنيا يمر بالنقط د و دَ و دً و دٌ و ٠٠٠ واذا فرضنا ان ى تتناقص جدا فتقرب هذه النقط

بعضها من بعض وتشكل فى النهاية مسيراهندسيا تكون معادلته

$$ م (س و ص) = ٠ $$

ويسمى هذا المسير غلاف المنحنيات المبينة بالمعادلة المفروضة وتسمى هذه المنحنيات بالمغلوفات

ويرى بسهولة انه يمكن ايجاد المعادلة الاخيرة بحذف الكمية جـ فى المعادلة المفروضة ومن مشتقتها بالنسبة الى جـ لانه من المعلوم ان

$$ م (س و ص و جـ + ى) = م (س و ص و جـ) + ى مَ_{جـ} (س و ص و جـ + ة ى) $$

فالمعادلتان (١) تصيران

$$ م (س و ص و جـ) = ٠ \quad و \quad مَ_{جـ} (س و ص و جـ + ة ى) = ٠ $$

وباخذ النهاية يحدث

$$ م (س و ص و جـ) = ٠ \quad و \quad مَ_{جـ} (س و ص و جـ) = ٠ \qquad (١) $$

وهو ما أردنا بيانه

(نظرية) الغلاف يمس كل المغلوفات

لتكن ج نقطة مشتركة للغلاف والمغلوف مّا فميل المماس للمنحنى الثانى فى هذه النقطة يكون

$$ \frac{ى ص}{ى س} = - \frac{\frac{ى م}{ى س}}{\frac{ى م}{ى ص}} $$

وميل مماس الغلاف فى النقطة المذكورة يوجد باخذ مشتقة المعادلة م (س و ص) = ٠ لكن حيث ان هذه المعادلة ناشئة من حذف جـ بين المعادلتين (١) فنتحصل على المشتقة المطلوبة باعتبار جـ فى أولاهما متعلقة بالمتغلتين س و ص مبينة بثانيهما فاذا يكفى أخذ مشتقة

م (س و ص و جـ) = ٠ الكلية فيحدث

$$\frac{\partial م}{\partial س} + \frac{\partial م}{\partial ص}\,\frac{\partial ص}{\partial س} + \frac{\partial م}{\partial جـ}\,\frac{\partial جـ}{\partial س} = ٠$$

وحيث ان $\frac{\partial م}{\partial جـ}$ أو $م_{جـ}$ (س و ص و جـ) = ٠ تؤول هذه المعادلة الى

$$\frac{\partial م}{\partial س} + \frac{\partial م}{\partial ص}\,\frac{\partial ص}{\partial س} = ٠$$

ومنها

$$\frac{\partial ص}{\partial س} = - \frac{\frac{\partial م}{\partial س}}{\frac{\partial م}{\partial ص}}$$

وهو عين المقدار السابق فالمنحنيين المذكورين في النقطة ح مماس واحد فهما حينئذ متماسان وهو المطلوب

(تطبيق)

المطلوب غلاف المستقيمات المبينة بالمعادلة

$$ص = جـ س + \sqrt{أ^٢ جـ^٢ + ب^٢}$$

المفروض فيها ان جـ كمية غير معينة

لنأخذ مشتقتها بالنسبة الى جـ فيحدث

$$س + \frac{أ^٢ جـ}{\sqrt{أ^٢ جـ^٢ + ب^٢}} = ٠$$

وبحذف جـ من هاتين المعادلتين نجد معادلة الغلاف وهى

$$أ^٢ ص^٢ + ب^٢ س^٢ = أ^٢ ب^٢$$

أعنى انه قطع ناقص

(تمرينات)

١ . المطلوب غلاف المستقيمات المبينة بالمعادلة

$$ص + جـ س + جـ^٢ = ٠$$

الجواب $س^٢ = ٤ ص$

٢. غلاف مستقيم طوله ل وطرفاه متحركان على ضلعي زاوية قائمة

(الجواب) $س^{\frac{2}{3}} + ص^{\frac{2}{3}} = ل^{\frac{2}{3}}$

٣. ما غلاف العواميد للمنحنى $ص = م(س)$

(الجواب) هو منتشر المنحنى المفروض

(في السطوح الغلافية)

١٤١ لتكن $م(س, ص, ط, ج) = ٠$ معادلة سطح تحتوى على كمية ج غير معينة فيرى كما تقدم انه اذا محونا هذه الكمية بين المعادلتين

$$م(س, ص, ط, ج) = ٠$$

$$م(س, ص, ط, ج + ى) = ٠$$

تحدث معادلة كهذه $م(س, ص, ط) = ٠$ تبين سطحا يمر بخطوط تقاطع السطوح الناشئة من المعادلة المفروضة واذا تناقصت ى فتقرب هذه الخطوط بعضها من بعض وتشكل سطحا تكون معادلته $م(س, ص, ط) = ٠$ وهي ناتجة من حذف ج بين المعادلتين

$$م(س, ص, ط, ج) = ٠$$

$$م'_{ج}(س, ص, ط, ج) = ٠$$

فهذا السطح يسمى بالغلاف وخطوط التقاطع المذكورة سماها المهندس الشهير مونج (١) بالخطوط التعريفية وهي تتبين بالمعادلتين السابقتين .

ليكن مثلا المطلوب غلاف الكرة التي مركزها يتحرك على محيط دائرة معلومة لنفرض ان هذه الدائرة تكون في المستوى الاحداثي س ص ومركزها في الاصل فتكون معادلتها

$$ج^2 + ى^2 = ه^2 \qquad (١)$$

وتكون معادلة الكرة

---

(١) هو أحد الرياضيين الفرنساويين الكبار ولد سنة ١٧٤٦ ومات في سنة ١٨١٨ وهو مخترع الهندسة الوصفية

$$(\text{س} - \text{ج})^{٢} + (\text{ص} - \text{ى})^{٢} + \text{ط}^{٢} = \text{نق}^{٢} \qquad (٢)$$

فاذا محونا ى من هاتين المعادلتين نجد معادلة تحتوى على المتغيرات س و ص و ط و ج فاذا اخذت مشتقة المعادلة (٢) باعتبار ى متعلقة بالمتغيرة ج مبينة بالمعادلة (١) فيحدث

$$\text{س} - \text{ج} + (\text{ص} - \text{ى}) \frac{\text{دى}}{\text{دج}} = ٠$$

ومن (١) ينتج

$$\frac{\text{دى}}{\text{دج}} = - \frac{\text{ج}}{\text{ى}}$$

فتؤول المعادلة السابقة الى

$$(\text{س} - \text{ج})\, \text{ى} = (\text{ص} - \text{ى})\, \text{ج} = ٠$$

أو $\text{س ى} - \text{ص ج} = \text{ث} \qquad (٣)$

فاذا محونا من (١) و (٢) و (٣) الكميتين ج و ى يحدث

$$(\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} + \text{ث}^{٢} - \text{نق}^{٢})^{٢} = ٤\, \text{ث}^{٢} (\text{س} + \text{ص})$$

وهى معادلة الغلاف المطلوب

(تمرينان)

١. المطلوب غلاف المستويات الماسة لمجسمين أحدهما موجود فى المستوى الاحداثى س ط والآخر فى ص ط

(الجواب)

$$\text{ط} = ٢\, \text{ع}\, \text{س} + ٢\, \text{ع}\, \text{ص}$$

٢. المطلوب غلاف مستو متحرك مار بنقطة معلومة و بعده من نقطة أخرى معلومة أيضا يكون ثابتا اذا كانت ب هى البعد المفروض وكانت

$$\text{م}\, \text{س} + \text{ن}\, \text{ص} + \text{ط} - \text{هـ} = ٠$$

معادلة المستوى فيكون الجواب

$$(\text{هـ}^{٢} - \text{ب}^{٢})(\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}) - \text{ب}^{٢} (\text{هـ} - \text{ط})^{٢} = ٠$$

قد تم طبع الجزء الاول من حساب التفاضل بمطبعة بولاق الاميرية في أوائل
شهر ربيع الاول سنة ألف ومائتين وتسع وتسعين هجرية ويليه الجزء الثاني في
حساب التكامل هذا ولما كانت الناس ليست هدفا لسهام الانتقاد والاعتراض
أتيت راجيا من الواقفين على كتابي هذا من اهل العلم ان يسدلوا سدل الاغضاء
على ما عساهم أن يعثروا عليه مما لا أبرئ نفسي منه من الغلط والغلط لاسيما
وانه فيما أعلم أول تأليف عربي في هذا العلم ظهر بالبلاد الشرقية
وكما يقال كل شيء صعب في أوله ولهذا ارجو من اهل
الفضل عموما واخواني المصريين خصوصا
ان يتلقوه بيد القبول وينظروه بعين
الرضا التي لا يراهم الا بها
صادق الاخاء
شفيق

